pdfauthor = APMEP, pdfsubject = Baccalauréat S, pdftitle = Concours contrôleur des douanes session 2017, allbordercolors = white, pdfstartview=FitH

Concours contrôleur des douanes session 2017

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

Exercice nº 1 :

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée. Pour k(1;2;3;4) , on note pi la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p1 , p2 , p3 et p4 , dans cet ordre, forment une progression arithmétique. 1. Sachant que p4=0,4 , démontrez que p1=0,1 , p2=0,2 et p3=0,3 . 2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont indépendants. a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ? b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ? 3. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants. On note U n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer. a. Montrez que (U n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente. n b. Calculez Sn=Ui puis étudiez la convergence de la suite (Sn) . i=1

Exercice nº 2 :

On considère la suite de nombres réels (un) définie sur N par : u0=1 , u1=12 et, pour tout entier naturel n , un+ 2=un+ 114 un .
1. Calculez u2 et déduisez-en que la suite (un) n'est ni arithmétique ni géométrique. 2. On définit la suite (vn) en posant, pour tout entier naturel n : vn=un+112 un .
a. Calculez v0 . b. Exprimez vn+1 en fonction de vn . c. Déduisez-en que la suite (v n) est géométrique de raison d. Exprimez vn en fonction de n .
12 .
3. On définit la suite (wn) en posant, pour tout entier naturel n : wn=un . vn a. Calculez w0 . b. En utilisant l'égalité un+ 1=vn+ 12 un , exprimez wn+ 1 un et de vn . c. Déduisez-en que pour tout n de N , d. Exprimez wn en fonction de n . 4. Montrez que pour tout entier naturel n 5. Pour tout entier naturel n , on pose : Démontrez par récurrence que pour tout n Sn=uk=u0+ u1+ ...+ un . k=0 de N = Sn=2 2n+ 3 . 2n

Exercice nº 3 :

en fonction de . .
Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudiez le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
   b. Calculez $\varphi(\text{e})$.
   Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\text{e}[$. (On rappelle que $\text{e} \approx 2,718$).
   c. Déterminez le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit la fonction f définie $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.
   On note f' la fonction dérivée de f.
   a. Calculez $f'(x)$et montrez que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.