

Concours contrôleur des douanes

session 2019

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice n° 1

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction g et en déduire son tableau de variations.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (\mathcal{C}) représentative de f sur $[0 ; 1]$ dans un repère orthonormé.
3.
 - a. Déterminer une primitive de f sur $[0 ; 1]$.
 - b. Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan déterminé par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \frac{2u_n}{2 + 3u_n} \end{cases}$$

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .

- b. La suite (u_n) est elle arithmétique? géométrique?
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas nul et on pose $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$.
- a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
- b. Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n
- c. Vers quel nombre tend la suite (u_n)

Exercice n° 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

On considère quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A(-1; 2; 1) ; B(1; -6; -1) ; C(2; 2; 2) ; I(0; 1; -1)$$

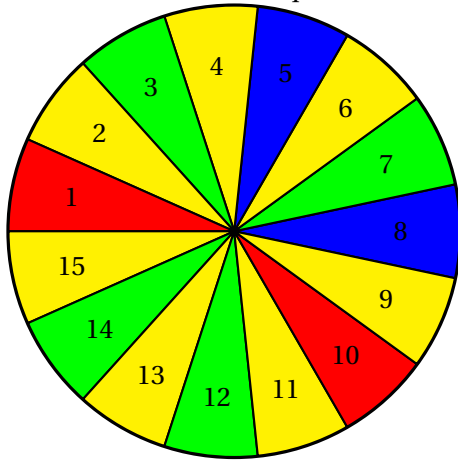
1. Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{AC} .
Justifier que les 3 points A, B et C définissent un plan P.
2. Soit \vec{u} le vecteur de coordonnées $(1; 1; -3)$.
Démontrer que \vec{u} est orthogonal à \overrightarrow{AB} et à \overrightarrow{AC} .
Déterminer une équation cartésienne du plan P.

Exercice n° 4

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15.

Ces secteurs sont de différentes couleurs (secteurs 1 et 10 rouges; secteurs 2, 4, 6, 9, 11, 13 et 15 jaunes; secteurs 5 et 8 bleus, secteurs 3, 7, 12 et 14 verts).

On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.



L'ensemble des éventualités est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
- a. E « le numéro est multiple de 5 »
- b. F « le numéro n'est pas multiple de 5 »
- c. G « le numéro est pair et inférieur à 11 »
- d. $E \cap G; E \cup G$.

2. Les secteurs 1 et 10 sont de couleur rouge. Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue. Les secteurs 3, 7, 12 et 14 sont de couleur verte. Les autres secteurs sont de couleur jaune.

La variable aléatoire X , qui associe à la couleur bleue le nombre 100, à la couleur rouge le nombre 30, à la couleur verte le nombre 10 et à la couleur jaune le nombre 0, correspond au gain du joueur en euros.

- a. Donner la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.
3. Deux observateurs A et B sont un peu éloignés de la roue. Ils voient la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête mais ne peuvent pas distinguer les numéros. B connaît la correspondance entre les numéros et les couleurs des différents secteurs et indique à A sur quel numéro il doit parier.

Évaluer dans chacun des cas suivants la probabilité pour A de gagner :

- a. La roue s'arrête sur un secteur rouge et A parie que le numéro est 15.
- b. La roue s'arrête sur un secteur vert et A parie que le numéro est 3.
- c. La roue s'arrête sur un secteur bleu et A parie que le numéro est 8.
- d. La roue s'arrête sur un secteur jaune et A parie que le numéro n'est pas 14.