# Concours contrôleur des douanes
# session 2020

**OPTION A : Mathématiques**

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

**Exercice n° 1**

On considère la fonction $f$ définie pour tout $x > 3$ par $f(x) = \ln(2x-6)$ et on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

**Partie I**

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque $x \to 3$ et $x \to +\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?
2. Étudier le sens de variation de $f$ et dresser le tableau de variations.
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées de A?
4. Déterminer une équation de la droite $(T)$ tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

**Partie II**

On considère la droite $(D)$ d'équation $y = x$. Par symétrie axiale d'axe $D$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se transforme en une courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que pour tout réel $x$, la fonction $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $g(x) = a + b\text{e}^x$ où $a$ et $b$ sont deux réels.
La courbe $\mathscr{C}_g$ passe par le point A$'$ image de A par la symétrie axiale d'axe $D$. De plus, la courbe admet au point A$'$ une tangente $(T')$ qui est l'image de $(T)$ par la symétrie d'axe $(D)$.

1. Calculer, en justifiant, les valeurs de $a$ et $b$.
2. Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à $\mathscr{C}_g$ et ayant pour abscisse 3. En déduire les coordonnées du point E$'$ image de E par rapport à $D$.
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^3 \left(3 + \frac{1}{2}\text{e}^x\right)\,\text{d}x$.
4. En déduire l'aire $A$, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E.
5. Expliquer comment on peut en déduire, sans calcul, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{3+\frac{1}{2}\text{e}^3} f(x)\text{d}x$.

**Exercice n° 2**

Soient $a$ et $b$, deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 4$ et $b_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n) \\ b_{n+l} & = & \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n) \end{array}\right.$$

$\Delta$ étant un axe rapporté au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}\right)$, pour tout entier naturel $n$, on désigne par $A_n$ et $B_n$, les points de $\Delta$ d'abscisses $a_n$ et $b_n$.

1. Placer $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ sur $\Delta$.
2. Soit $u_n$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = a_n + b_n$.
   **a.** Démontrer que la suite $u_n$ est constante.
   **b.** En déduire que pour tout entier naturel $n$, les segments $[A_nB_n]$ ont le même milieu I dont on déterminera l'abscisse.
3. On considère la suite réelle $v_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = b_n - a_n$.
   **a.** Montrer que $v_n$ est une suite géométrique. Déterminer sa limite si elle existe.
   **b.** Que peut-on dire de la distance $A_nB_n$ lorsque $n \to +\infty$?
4. Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$ pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$.
5. Démontrer que $a_n$ et $b_n$ sont convergentes et ont la même limite.

**Exercice n$^{\text{o}}$ 3**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $2x + y - z + 7 = 0$ et les points A (4 ; 1 ; -2), B(-3 ; 1 ; 2) et C(-1 ; 3 ; 1).

1. Montrer que le point B appartient au plan (P) et déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (BC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et orthogonal à (BC).
3. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite ($\Delta$) passant par A et orthogonale à (P).
4. Soient R le projeté orthogonal de A sur (P) et S le projeté orthogonal de A sur (BC), déterminer les coordonnées de R et S.

**Exercice n$^{\text{o}}$ 4**

Une urne contient 3 boules bleues et $n$ boules blanches ($n$ étant un entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée.

**Partie I**

On tire successivement 3 boules avec remise et on désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées.

1. Donner la loi de probabilité de $X$.
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et déterminer $n$ pour que l'espérance mathématique soit égale à $1,5$.

**Partie II**

Pour la suite de l'exercice on considère que $n = 2$.
On effectue un tirage successif et sans remise des 5 boules de l'urne. On désigne par $Z$ la variable aléatoire égale au rang de la première boule bleue tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de $Z$.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $Z$.