↜ Concours contrôleur des douanes ↝
Branche surveillance session 2020

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice nº 1

On considère la fonction f définie pour tout $x > 3$ par

$$f(x) = \ln(2x - 6),$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie I

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque $x \to 3$ et $x \to +\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variations.
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées de A?
4. Déterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie II

On considère la droite (D) d'équation $y = x$. Par symétrie axiale d'axe D, la courbe $\mathscr{C}_f$ se transforme en une courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que pour tout réel x, la fonction $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $g(x) = a + b\text{e}^x$ où a et b sont deux réels.
La courbe $\mathscr{C}_g$ passe par le point A′ image de A par la symétrie axiale d'axe D. De plus, la courbe admet au point A′ une tangente (T') qui est l'image de (T) par la symétrie d'axe (D).

1. Calculer, en justifiant, les valeurs de a et b.
2. Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à $\mathscr{C}_g$ et ayant pour abscisse 3. En déduire les coordonnées du point E′ image de E par rapport à D.
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^3 \left(3 + \frac{1}{2}\text{e}^x\right) \text{d}x$.
4. En déduire l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E.
5. Expliquer comment on peut en déduire, sans calcul, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{3+\frac{1}{2}\text{e}^3} f(x)\text{d}x$.

Exercice n° 2

Soient a et b, deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 4$ et $b_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n)\\ b_{n+l} & = & \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n)\end{array}\right.$$

Δ étant un axe rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$, pour tout entier naturel n, on désigne par A_n et B_n, les points de Δ d'abscisses a_n et b_n.

1. Placer A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2 sur Δ.
2. Soit u_n la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = a_n + b_n$.
   a. Démontrer que la suite u_n est constante.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, les segments $[A_nB_n]$ ont le même milieu I dont on déterminera l'abscisse.
3. On considère la suite réelle v_n définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = b_n - a_n$.
   a. Montrer que v_n est une suite géométrique. Déterminer sa limite si elle existe.
   b. Que peut-on dire de la distance A_nB_n lorsque $n \to +\infty$?
4. Exprimer a_n et b_n en fonction de n pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
5. Démontrer que a_n et b_n sont convergentes et ont la même limite.

Exercice n° 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $2x + y - z + 7 = 0$ et les points A$(4~;~1~;~-2)$, B$(-3~;~1~;~2)$ et C$(-1~;~3~;~1)$.

1. Montrer que le point B appartient au plan (P) et déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (BC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et orthogonal à (BC).
3. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à (P).
4. Soient R le projeté orthogonal de A sur (P) et S le projeté orthogonal de A sur (BC), déterminer les coordonnées de R et S.

Exercice n° 4

Une urne contient 3 boules bleues et n boules blanches (n étant un entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée.

Partie I

On tire successivement 3 boules avec remise et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer E(X) et déterminer n pour que l'espérance mathématique soit égale à 1,5.

Partie II

Pour la suite de l'exercice on considère que $n = 2$.
On effectue un tirage successif et sans remise des 5 boules de l'urne. On désigne par Z la variable aléatoire égale au rang de la première boule bleue tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de Z.

2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Z.