

Concours contrôleur des douanes

Branche surveillance – session 2021

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

Soit les points $A(1; 2)$ et $M(-1; m)$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite D_m passant par A et M .

Tracer D_1 et D_2 .

2. Quel est le coefficient directeur de D_m ?

3. Déterminer m tel que :

D_m passe par $B(2; 1)$;

D_m soit parallèle à l'axe Ox ;

D_m coupe l'axe Ox en un point C d'abscisse -2 ;

D_m coupe l'axe Oy en un point D d'ordonnée 3 .

Représenter D_m dans chaque cas, sur le même dessin.

4. A-t-on toutes les droites passant par A , lorsque l'on fait décrire à m l'ensemble \mathbb{R} ?

Soit maintenant Δ_m la droite d'équation :

$$(m + 7)x + (m + 3)y - 2m - 9 = 0$$

5. Montrer que Δ_m passe par un point fixe E dont on déterminera les coordonnées.

6. Étudier suivant les valeurs de m la position relative de D_m et Δ_m .

Exercice 2

On lance trois dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on considère les événements suivants :

- A : « on obtient au moins un six »
- B : « deux dés, au moins, donnent un résultat identique ».

On note respectivement \bar{A} et \bar{B} les événements contraires de A et B .

Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Calculer la probabilité des événements : \bar{A} , \bar{B} , A , B .

2. Décrire l'évènement $(\bar{A} \cap \bar{B})$ puis calculer sa probabilité.

3. En remarquant que : $\bar{A} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, déduire de 2. la probabilité de l'évènement $(\bar{A} \cap B)$.

4. Par une méthode semblable, calculer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.

5. Les évènements A et B sont-ils indépendants? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-après. Cette figure est à reproduire sur votre copie.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x) - \frac{1}{3}x$ en $+\infty$.

Que peut-on dire de la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ par rapport à la courbe (C) ,

c. On a $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$.

Or quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc $1 + e^{-x} > 1$ et par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$ ou encore $\ln(1 + e^{-x}) > 0$: ceci signifie que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la courbe (C) est au dessus de la droite (D) .

d. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x =$

$$\ln(e^x + 1) - \ln(e^x) + \frac{1}{3}x. \text{ Or } \ln(e^x) = x.$$

$$\text{Donc } f(x) = \ln(e^x + 1) - x + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x.$$

e.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}.$$

En déduire les variations de la fonction f .

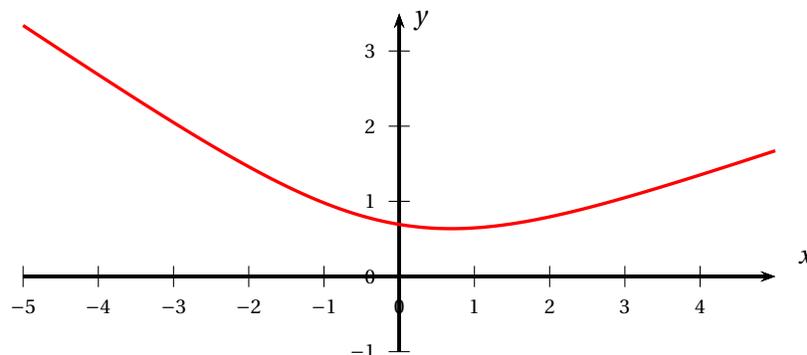
Partie B

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C) .

On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique reproduit sur votre copie.

2. Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T) .



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C est représentée ci-après.

Partie A

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que, pour tout nombre réel positif x , le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$.

On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

Première méthode

1. Reproduire sur votre copie le graphique ci-dessous et y représenter la partie du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à $A(\lambda)$.
2. Justifier que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \leq \lambda f(1)$.

Seconde méthode

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur \mathbb{R}^+ .

Calculer ensuite $\int_0^\lambda xe^{-x} dx$ en fonction de λ .

2. On admet que, pour tout nombre réel positif u , $\ln(1+u) \leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif :
 $A(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $A(5)$, arrondi au centième.

Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

On donnera comme valeurs approchantes : $e^{-5} \approx 0,007$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \approx 0,31$.

