∽ Concours contrôleur des douanes ∾
session 2021

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

Soit les points A(1 ; 2) et $M(-1\ ;\ m)$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite D_m passant par A et M.
   Tracer D_1 et D_2 .
2. Quel est le coefficient directeur de D_m ?
3. Déterminer m tel que :
   - D_m passe par B(2 ; 1) ;
   - D_m soit parallèle à l'axe Ox ;
   - D_m coupe l'axe Ox en un point C d'abscisse -2 ;
   - D_m coupe l'axe Oy en un point D d'ordonnée 3.

   Représenter D_m dans chaque cas, sur le même dessin.
4. A-t-on toutes les droites passant par A, lorsque l'on fait décrire à m l'ensemble $\mathbb{R}$?
   Soit maintenant Δ_m la droite d'équation :
   $$(m+7)x+(m+3)y-2m-9=0$$
5. Montrer que Δ_m passe par un point fixe E dont on déterminera les coordonnées.
6. Étudier suivant les valeurs de m la position relative de D_m et Δ_m.

Exercice 2

On lance trois dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on considère les événements suivants :
- A : « on obtient au moins un six »
- B : « deux dés, au moins, donnent un résultat identique ».

On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Calculer la probabilité des évènements : $\overline{A}$, $\overline{B}$, A, B.
2. Décrire l'événement $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ puis calculer sa probabilité.
3. En remarquant que : $\overline{A} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$, déduire de 2. la probabilité de l'évènement $\left(\overline{A} \cap B\right)$.
4. Par une méthode semblable, calculer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.

5. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-après. Cette figure est à reproduire sur votre copie.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de $f(x) - \frac{1}{3}x$ en $+\infty$.

   Que peut-on dire de la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ par rapport à la courbe (C),

   Tracer (C).

   c. Étudier la position relative de (D) et de (C).

   d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.

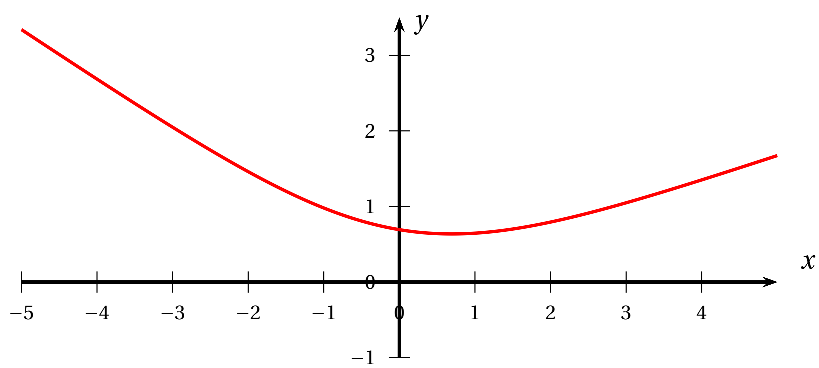
   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout x réel,
   $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 2}{3\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique reproduit sur votre copie.
2. Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\text{e}^{-x}\right)$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C est représentée ci-après.

Partie A

1. Justifier que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que, pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\text{d}x$.
On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

Première méthode

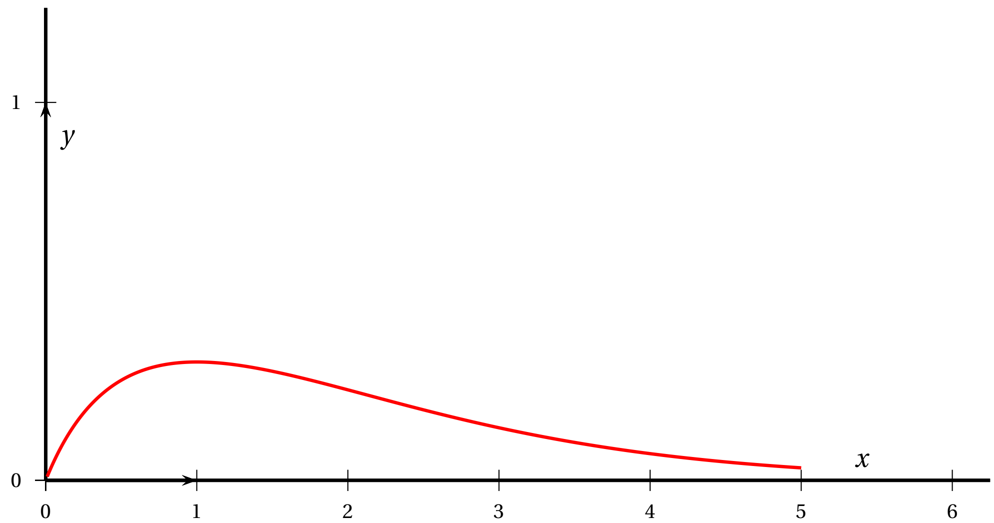
1. Reproduire sur votre copie le graphique ci-dessous et y représenter la partie du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à $A(\lambda)$.
2. Justifier que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \leqslant \lambda f(1)$.

Seconde méthode

1. Vérifier que la fonction $x \longmapsto -(x+1)\text{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto x\text{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
   Calculer ensuite $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\text{e}^{-x}\,\text{d}x$ en fonction de λ.
2. On admet que, pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.
   Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif : $A(\lambda) \leqslant -\lambda\text{e}^{(-\lambda)} - \text{e}^{(-\lambda)} + 1$.

Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $A(5)$, arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?
On donnera comme valeurs approchantes : $\text{e}^{-5} \approx 0{,}007$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\text{e}}\right) \approx 0{,}31$.


1
0
y
x
0
1
2
3
4
5
6