Concours contrôleur des douanes session 7 mars 2016

Branche surveillance Aéronautique : pilote d'hélicoptère

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– L'usage de la calculatrice est interdit, – Tous les exercices devront être traités, et chaque réponse devra être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte; Toutes les réponses doivent être rigoureusement justifiées

Exercice 1

On considère un jeu de trente-deux cartes, comprenant quatre couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique), avec pour chacune huit hauteurs (as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit et sept).
Les résultats des questions 1. et 2. pourront être exprimés sous la forme de produits de nombres premiers et/ou de nombres premiers élevés à une puissance.

1. Combien y a-t-il de mains de huit cartes possibles?

2. Combien y en a-t-il contenant :

- **a.** une dame exactement?
- **b.** trois cœurs exactement?
- **c.** une dame et trois cœurs exactement?
- **d.** aucune dame?
- **e.** une dame et aucun cœur?

3. Exprimer littéralement, en fonction des résultats trouvés ci-dessus, la probabilité associée à l'évènement « la main contient au moins une dame ».

Exercice 2

PARTIE A

On considère la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = 3x^3 - x - 2.$$

1. Vérifier que $P(1) = 0$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x : $P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$.

3. Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x \text{ où ln désigne le logarithme népérien.}$$

1. Soit g' la dérivée première de g. Montrer que $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$.

2. Étudier le sens de variation de g.

3. Déduire de la question précédente le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   b. Montrer que $\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
   c. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   d. Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x=0$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Montrer que la fonction h telle que $h(x) = x+\ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que (Δ) coupe $(\mathscr{C})$ en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha+\ln\alpha = 0$.
   Prouver que $0,56 < \alpha < 0,57$; on donne les valeurs approchées suivantes :
   $\ln(0,56) \approx -0,58$ et $\ln(0,57) \approx -0,56$).
   c. Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).
3. Étudier le sens de variation et la continuité de f sur son intervalle de définition.
4. Déduire de la question précédente l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$.
   Montrer que $0,46 < \beta < 0,47$ (on donne les valeurs approchées suivantes :
   $\ln(0,46) = -0,78$ et $\ln(0,47) \approx -0,75$).
5. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la région du plan comprise entre $(\mathscr{C})$ et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.
   On admettra que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1-\frac{2}{\mathrm{e}}$.
   Calculer $\mathscr{A}$ (le résultat sera exprimé en unités d'aire u. a.).

Exercice 3

Sophie place un capital initial $C_0 = 3\,000$ € à un taux annuel de 6 %, les intérêts étant simples (capital d'une année égal à celui de l'année précédente augmenté de 6 % du capital initial). On note C_n le capital de Sophie au bout de n années.

1. Montrer que, pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 180$.
   Qu'en déduit-on concernant la nature de la suite (C_n) ?
2. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
3. De quel capital Sophie dispose-t-elle au bout de 10 ans ?
4. Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?
5. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10 000 € ?

Exercice 4

Un maître et son élève tirent à l'arc sur une cible. L'élève tire deux fois sur trois et atteint la cible une fois sur deux. Le maître tire une fois sur trois mais atteint la cible neuf fois sur dix.

1. Quelle est, pour une flèche tirée, la probabilité d'atteindre la cible ?
2. Une flèche est dans la cible. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par l'élève ?
   Les résultats des 2 questions seront exprimés sous la forme de fractions irréductibles.

Exercice 5

PARTIE A

On considère une suite réelle (u_n) qui vérifie : $\left\{\begin{array}{lcl} 0 & < & u_0 \\ 1 & < & \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \end{array}\right.$

1. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante positive.
2. Si maintenant on suppose qu'il existe un réel r vérifiant $1 < r \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, démontrer que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

PARTIE B

Soit a un réel strictement positif, on étudie la suite (v_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} 0 < & v_0 & < a \\ v_{n+1} & = & \dfrac{v_n + a}{2} \end{array}\right.$

1. Démontrer que la suite (v_n) vérifie $1 < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
2. Démontrer que la suite (v_n) converge vers une limite finie que l'on précisera.

PARTIE C

1. Quelle est la nature de la suite (w_n) définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} 0 & < & w_0 \\ w_{n+1} & = & w_n + 1 \end{array}\right.$?
2. Quelle est la limite du rapport $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$?

Exercice 6

Soif f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$.