∽ Concours contrôleur des douanes session 2012 ∾

Concours : surveillance et aéronautique :pilote d'avion des douanes

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– L'usage de la calculatrice est interdit,
– Tous les exercices devront être traités,
– Chaque réponse devra être rigoureusement justifiée et devra être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte.

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} - \cos x.$$

1. Calculez numériquement les valeurs de $f(x)$ pour

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = 2\pi.$$

2. En détaillant votre réponse, calculez les valeurs de $x \in]0\ ;\ 2\pi]$ pour lesquelles f s'annule.

3. En remarquant que f est périodique de périodicité 2π, donnez l'ensemble des nombres réels racines de f.

Exercice 2

On considère un dé à six faces pipé.
La probabilité d'obtenir l'une des face est proportionnelle au chiffre inscrit dessus.
Dans cet exercice, les résultats devront être exprimés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé. Calculer la probabilité p_i d'obtenir la face i.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face impaire?

Justifiez que la probabilité d'obtenir une face paire est de $\frac{4}{7}$.

3. On joue à un jeu avec ce dé.

Si une face paire sort, le joueur gagne 100 % de sa mise.

Si une face impaire sort, le joueur perd 50 % de sa mise.

Une partie se déroule en trois jets de dés successifs.

Le joueur dispose d'une somme d'argent en début de partie. Il est obligé de parier la totalité de son argent à chaque jet de dé.

   a. Détaillez de combien Sophie dispose à l'issue de chaque jet de dé. Donnez, en les justifiant ces résultats sous forme d'un arbre.

   b. Quelle est la probabilité associée à chacun des gains possibles à l'issue du troisième jet de dé.

   c. Ce jeu est-il en faveur ou défaveur de Sophie? Justifiez.

d. Si le dé n'était pas pipé, le jeu serait-il en faveur ou en défaveur de Sophie ? Justifiez.

Exercice 3

En vous aidant des propriétés de la fonction exponentielle, répondez en détaillant vos calculs aux questions suivantes :

1. Quelles sont dans $\mathbb{R}$ les solutions – si elles existent– de l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x.$$

2. Calculez la limite quand $x \to +\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}?$$

3. Quelle est la solution – si elle existe – de l'équation

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Exercice 4

Soit la fonction réelle

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Partie A

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez la dérivée de f et donnez son domaine de définition.
3. Etudiez le signe de la dérivée de f et déduisez-en les variations de f.

Partie B

On considère l'équation

$$n^p = p^n,$$

où p et n sont des entiers naturels.

1. En utilisant les propriétés du logarithme népérien et de la fonction exponentielle, ré-exprimez l'équation sous la forme de quotients.
   Exprimez $\ln(4)$ en fonction de $\ln(2)$.
2. En utilisant les résultats obtenus dans la partie A, prouvez que l'équation $n^p = p^n$ n'admet qu'une seule solution $(n\,;\,p)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Donnez cette solution.

Exercice 5

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 2, \quad v_n = \frac{2}{u_n} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrez par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 1 et majorées par 2.
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2\,(u_n v_n)}$.

   Indication : remarquez que $v_n = \dfrac{2}{u_n} \iff v_n u_n = 2$.
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$.
4. Montrez que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.
5. On considère la relation suivante : $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On ne demande pas de démontrer cette relation)

   En déduire un encadrement de $u_n - v_n$.
6. Calculez la limite de la suite $((w_n)$ définie par $w_n = u_n - v_n$.

   Qu'en déduisez-vous ?
7. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n). Justifiez.