

# ∞ Concours contrôleur des douanes ∞

## Branche surveillance — session 2025

### OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

#### Remarque préliminaire :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet. Le sujet et les feuilles de brouillon ne seront ni ramassés ni corrigés.

#### Exercice 1

Dans une fête foraine, un ticket enfant permet d'effectuer autant de tirs successifs qu'il est nécessaire pour crever un ballon.

À chacun de ses tirs, on considère qu'un enfant a la probabilité 0,2 de crever le ballon.

Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé.

1.
  - a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
  - b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
  - c. Quelle est la probabilité  $p$  que  $n$  tirs suffisent pour crever le ballon ?
2. Un deuxième stand de tir propose la règle suivante :
  - le joueur lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée).
  - Soit  $k$  le numéro de la face obtenue, le joueur peut réaliser au maximum  $k$  tirs pour crever le ballon.

Déterminer la probabilité de crever le ballon.

Pour indications  $0,8^3 = 0,512$  et  $0,8^4 \approx 0,41$ .

#### Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f(x) = 2x e^{-x}.$$

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Pour l'exercice on considérera que  $\ln(2) \approx 0,69$ ,  $e^{-0,1} \approx 0,90$  et  $e^{-1} \approx 0,37$ .

1.
  - a. Résoudre sur l'intervalle  $[0; 1]$  l'équation  $f(x) = x$ .
  - b. Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ ,

$$f'(x) = 2(1-x) e^{-x}.$$

- c. Donner le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$$

- b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.  
c. Démontrer que la limite de la suite  $(u_n)$  est  $\ln(2)$ .

### Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le plan  $P$  caractérisé par le point  $A(4; 2; -1)$  et les vecteurs  $\vec{u}(3; 1; 5)$  et  $\vec{v}(-2; -1; 0)$ .

- Vérifier que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.
- Les points  $P(5; 2; 4)$  et  $Q(0; -1; 10)$  appartiennent-ils au plan  $P$ ?
- Le point  $S\left(7; -2; \frac{10}{3}\right)$  appartient-il à la droite  $(PR)$  où  $R(2; 3; 3)$ ?
- Calculer les distances  $PQ$  et  $PR$ .

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \int_1^x \ln(t) dt.$$

- Que vaut  $f(1)$ ?
- Étudier le signe de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ , puis sur  $]0; 1[$ .
- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > 0$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  (on n'étudiera pas les limites en 0 et  $+\infty$ ).  
Vérifier les réponses obtenues à la question 2.
- Une intégration par partie nous donne :

$$\int \ln(t) dt = [t \ln(t)] - \int 1 dt.$$

Calculer  $f(x)$  pour tout  $x > 0$ .

- En déduire :
  - la valeur de  $f(e)$ .
  - la limite de  $f$  en 0.
  - la limite de  $f$  en  $+\infty$ .