

Promenade Aléatoire dans les Marchés Financiers

Les outils quantitatifs ont-ils un avenir
après la crise?

Conférence de l'APMEP

Nicole El Karoui

UPMC-Paris VI, Ecole Polytechnique

elkaroui@gmail.com

Marseille, 20 Octobre 2013

Finance mathématique ou Mathématiques financières

De nombreuses questions après la crise: En quoi la finance moderne est-elle mathématique?

- 1 Un bref historique des liens entre mathématique et finance
- 2 Le rôle des marchés dérivés et la gestion quotidienne du risque
- 3 Les mathématiques en jeu
- 4 Nouvelles priorités de recherche
- 5 Réintroduire la temporalité dans le Risk Management
- 6 Quelques remarques en conclusion

Quelques repères historique

- ▶ **1900**: Bachelier soutient sa thèse "Theorie de la Spéculation" devant Henri Poincaré qui est
 - le premier traité d'une axiomatique de la finance
 - contenant la première description du mouvement brownien
 - intensif usage des probabilités en temps continu
- ▶ **1929-1940**: Grande dépression, rôle moindre des marchés financiers.
La théorie macroéconomique qualitative domine
- ▶ **1970-1974**: (Etats-Unis) Les années de la déréglementation après la fin de la garantie du dollar par l'or
Innovation financière: Contracts à terme et options
 - Ouverture du Chicago Board of Options Exchange .
 - Théorie de la couverture des options par Black-Scholes-Merton

L' âge d'or de l'industrie financière

► 1987-2008: L' âge d'or de l'innovation financière

- Après 2003, Explosion du marché des options écrits sur des sous-jacents non négociables (Volatilité, Credit, Subprimes).
- Explosion of "Shadow Banking (Hedge-Funds) and High-Frequency Trading
- Les banques, les banques d'investissements deviennent de plus en plus quantitatives

► Age d'or de la finance quantitative

- De très nombreux scientifiques, mathématiciens, physiciens, biologistes sont recrutés
- Plus des trente plus grandes universités dans le monde ont des programmes in "Financial Mathematics and Engineering"
- Les articles de recherche sur les problèmes issus de la pratique augmentent spectaculairement



I SURVIVED...DEA EL KAROU, Promo 2010

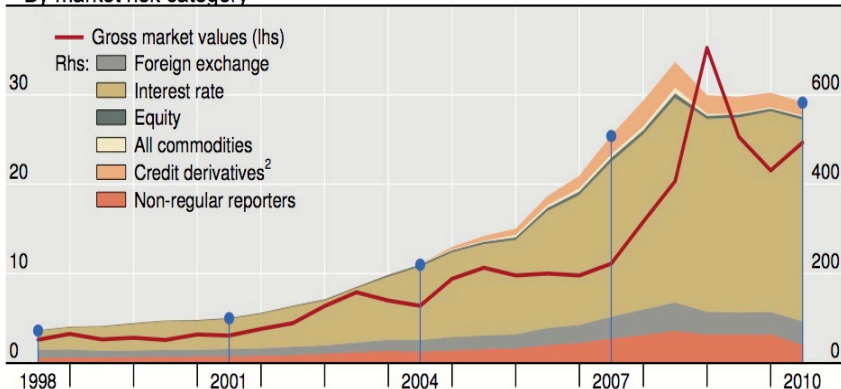
DEA Proba/Finance Paris VI/Ecole Polytechnique, 1990

OTC Market Derivatives 98-2010, Bis

Global OTC derivatives market

Triennial and semiannual surveys, notional amounts outstanding¹, in trillions of US dollars

By market risk category



¹ Dots mark triennial survey dates and data. ² Data available from end-December 2004.

Le rôle de la politique macroéconomique des USA

Un élément décisif de la crise financière:

- ▶ **l'affaiblissement** de l'industrie traditionnelle
- ▶ le crédit a donc remplacé les revenus pour soutenir la croissance
- ▶ la référence devient la richesse immobilière et non le revenu; spécifique du crédit hypothécaire US
- ▶ l'endettement des ménages (**165%**) est financé par l'épargne mondiale

d'après Patrick Arthus, Natixis

Crise de l'industrie financière

- ▶ 2007-2008 Credit Crunch/ Faillite de Lehman Brothers
 - Les **exces** de l'industrie financière ont conduit l'économie mondiale dans une crise sans précédent
 - Le **Credit crunch** était basé sur le risque des subprimes,
 - **Diffusion** de la crise immobilière à travers les places financières par des législations autorisant les transferts aux marchés
 - **Complexité accrues des produits**
- ▶ Depuis la crise, le business des dérivés de crédit a pratiquement disparu
- ▶ Une grande crise de liquidité dans le marché interbancaire
- ▶ Une réglementation accrue

AAStressInterbancaire.jpg

Le risque financier

Le risque lié à l'évolution future des marchés

- ▶ risque de transformation: recevoir à court terme et prêter à long term
- ▶ le risque de non paiement ou risque de contrepartie
- ▶ le risque de liquidité souvent associé aux crises
- ▶ le risque de modèle

Autres types de risque

- ▶ le risque opérationnel
- ▶ le risque de fraude

Réponse des marchés

- ▶ Réduire les risques
- ▶ surveillance du risque agrégé par activité
- ▶ Indicateurs de risques Value at Risk suivis par le régulateur

Gérer le risque financier: Quels moyens ?

Le netting

- ▶ Le plus **simple**: l'échange avec quelqu'un exactement le risque inverse. C'est ce qu'on appelle le **netting**.
- ▶ C'est de loin la méthode la plus fréquente.
- ▶ L'opération demande une **intermédiation financière** car en general, on ne trouve pas tout seul la contrepartie

Gérer le risque financier (2)

La titrisation

- ▶ la deuxième méthode est **la diversification**, ou "ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier".
- ▶ il s'agit de transférer une partie du risque en acceptant d'en prendre un peu d'un autre de nature a priori très différente.
- ▶ **la titrisation** est un moyen de faire ce genre d'opération : c'est une opération qui donne de la liquidité mais qui est aussi utilisée pour réduire les fonds propres.
- ▶ beaucoup développée depuis une vingtaine d'années surtout aux USA, mais moins en France.
- ▶ fortement réduite après la crise

Gestion des risques (3)

Les produits dérivés

- ▶ Le dernier moyen, pour se garantir contre les aleas du futur est de **s'assurer** par un contrat qui fixe le prix futur de l'opération.
- ▶ Ces produits sont vendus soit dans des marchés organisés (Chicago 1973, MATIF 1987) soit de gré à gré.
- ▶ Les produits de base sont les contrats à terme, forwards ou futures, les swaps d'intérêt et les options.

Exemples

- ▶ Quand El nino provoque des malheurs dans les pays du Pacifique, on assiste à une flambée des volumes sur les contrats futures de céréales.
- ▶ Swap d'une partie de la dette de l'Etat Français (en 2001) : Agence France Trésor pour réduire le montant des intérêts

Fluctuations des prix d'indices sur actions

CAC40(noir)/SP500(rouge), 2005-2008

Page 1 of 1



Enjeu Produits dérivés : Gérer le risque de marché pur

Des opérations dans le futur

- ▶ Réduire le risque financier, c'est à dire les fluctuations adverses, et l'incertitude due au futur.
- ▶ Dépendent des titres **sous-jacents**
- ▶ a priori autant d'acteurs que de vendeurs car les positions sont symétriques à la hausse ou à la baisse
- ▶ aussi considérés comme une composante majeure du risque systémique car ils peuvent engendrer de grandes pertes, par suite d'un fort effet de levier.

Produits dérivés

Definition

Les produits dérivés sont des **contrats** garantissant le prix de référence auquel une opération (d'achat ou de vente) d'un sous-jacent pourra être faite **dans le futur**, à une date précisée dans le contrat.

Exemples

- ▶ **Contrats à terme** : le cours de l'opération à échéance est fixé à la date de négociation.
- ▶ **Options d'achat ou option de vente**. Le cours fixé dans le contrat est utilisé comme plafond ou comme plancher.
L'opération ne sera réalisée au cours fixé que si le cours réel a dépassé le plafond (achat) ou le plancher (vente).

Cette option a un **prix** que Bachelier a cherché à expliquer.

Prix et arbitrage

Quelques remarques de bon sens

- ▶ Si un contrat garantit plus qu'un autre, il doit être plus cher
- ▶ si un flux garanti est décomposable en somme de flux de prix connus, son prix doit être la somme des prix.

Arbitrage et Règle du prix unique

- ▶ Un **arbitrage** est une stratégie qui permet de faire *un profit à coup sûr* sans mise de fond, **possibilité exclue dans un marché liquide**.
- ▶ Plus généralement, deux opérations financières qui conduisent aux mêmes flux dans le futur ont la même valeur à toute date intermédiaire. C'est **la règle du prix unique**

Calcul du prix à terme

Comme immédiate conséquence de la règle du prix unique

Le prix d'un contrat à terme

Le prix à terme sur un actif négocié se calcule à partir des données de marché, sans modèle. C'est la valeur d'aujourd'hui du sous-jacent capitalisée de l'intérêt.

On voit qu'on est dans un monde idéal....

Pricing des options

- ▶ Dans le cas des **options**, l'exercice est plus compliqué et ne peut se déduire des prix de marché
 - Le point de vue naïf face à ces flux **incertains**, est de calculer une **valeur estimée** des flux futurs.
 - L'analyse peut être basée sur l'observation des **cours passés** (statistique ou historique),
 - ou sur le point de vue des **experts**, soit souvent sur un mixte des deux.

Une fois le contrat conclu, l'acheteur ne s'en préoccupe plus jusqu'à l'échéance, date où il observe si sa position est gagnante ou non.

Premier bilan

On a des preuves de l'existence d'options sur les récoltes de blé dans l'Antiquité. Ce qui est nouveau:

- ▶ L'ampleur des liquidités qui circulent dans le marché (retraite=3000 Mds dollars)
- ▶ Le nombre de personnes concernées
- ▶ le nombre de supports concernés, action, taux, change, matières premières, catbond,
- ▶ L'impact des marchés organisés, producteurs d'**information** et de liquidités
- ▶ On est passé du stade artisanal au stade industriel, et avec des marges beaucoup plus faibles sur les produits très liquides
- ▶ Les risques sont amplifiés par les montants mis en oeuvre, d'autant que ces produits ont des forts effets de levier.
- ▶ Ceux qui n'ont pas mesuré cela ont souvent fait **faillite**, ou en ont

Plan

1 Des concepts nouveaux pour des risques nouveaux

- L'informatique
- Portefeuille de couverture
- Calcul stochastique

2 Risque de modèle

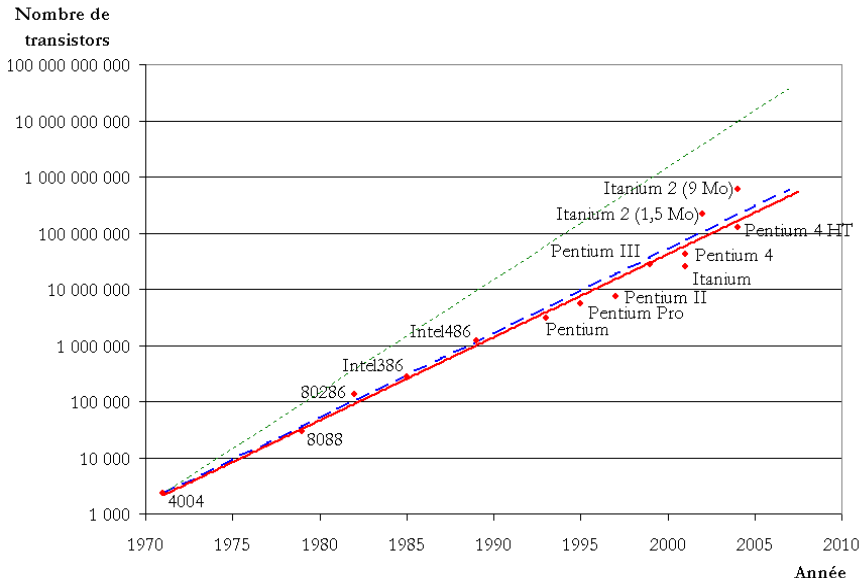
L'informatique

Outils et concepts sont venus de l'extérieur.

- ▶ En 1988 IBM déteint le marché des “gros ordinateurs” (1000 fois moins puissants qu'un portable)
- ▶ Capacité de stocker beaucoup de de données
- ▶ L'information commence à être cotée en temps réel
- ▶ Possibilité de communiquer entre différentes places financières.

Avantage comparatif aux banques qui ont su organiser leur informatique et le maintien des bases de données.

Croissance exponentielle de la puissance de calcul



Les idées

Deux jeunes universitaires américains **Black et Scholes** proposent dans un article (1973) d'introduire **la théorie du portefeuille** dans le monde des options. Ils observent que:

- ▶ Les titres assurés sont **échangeables** dans le marché, et on peut suivre leur cours au jour le jour)
- ▶ Il doit être possible d'utiliser ces informations pour réduire les risques inhérents aux contrats de maturité longue par des ajustements fréquents)
- ▶ L'outil d'ajustement est un portefeuille, c'est à dire le résultat d'investissements quotidiens (autofinanciant) dans l'actif et dont la mise initiale est la prime du contrat)
- ▶ La qualité de la stratégie dynamique est mesurée à travers la valeur terminale (liquidative) de ce portefeuille. Plus elle est proche de la valeur du flux garanti, plus elle est efficace.

Une révolution conceptuelle

Des concepts nouveaux

La révolution est d'ampleur puisque le problème n'est plus **d'estimer des pertes potentielles** mais de les réduire de manière dynamique.

“Le suivi de marché devient la réalité objective”(Nicolas Bouleau)

Des outils mathématiques sophistiqués

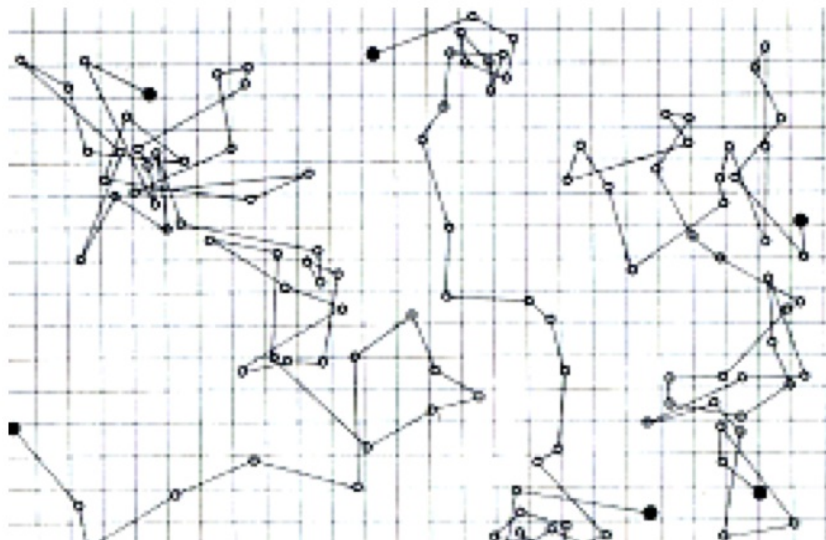
Est-il possible de représenter les variations des cours par un modèle ou une simulation?

la trajectoire ressemble à celle d'un ivrogne qui changerait d'orientation au hasard à chaque étape

- ▶ point de vue de **Bachelier** puis de **Einstein** en 1905 pour modéliser la trajectoire des atomes: le problème se retrouve aussi en signal et dans beaucoup d'autres domaines
- ▶ moyens informatiques puissants car beaucoup de **tirages** à faire.
- ▶ Toute la technologie repose sur des théories en probabilité développées à partir des **années 1930**.

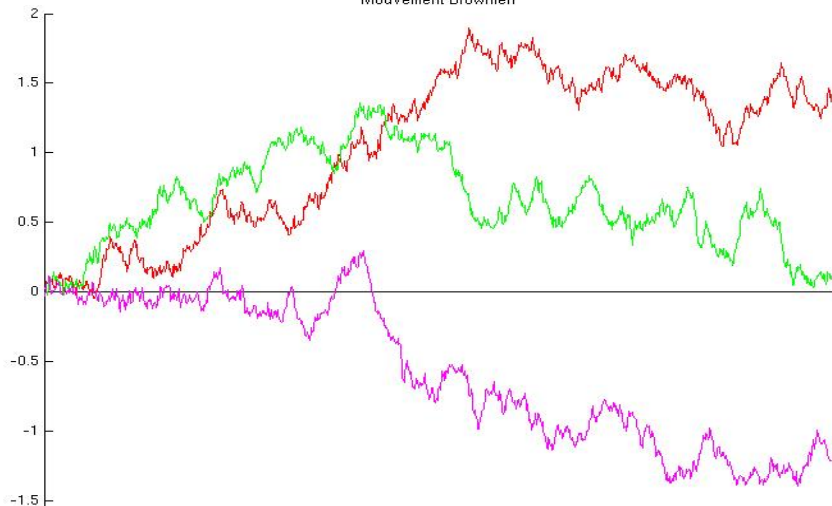
Brownien Experimental

La promenade de l'ivrogne

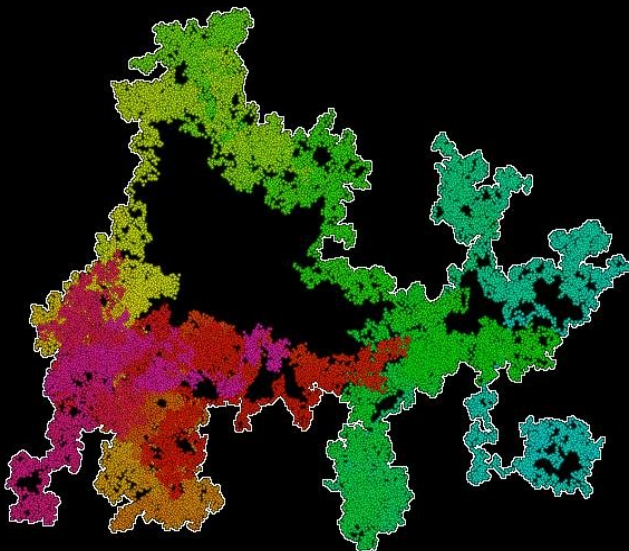


Mouvement brownien: un ivrogne très réactif

Mouvement Brownien



Mvt brownien 2D / Colonna



Couvrir un dérivé, un problème de cible résoluble

- ▶ Par absence d'arbitrage, le prix d'un dérivé est celui du portefeuille qui le réplique.
- ▶ Le message incroyable de Black et Scholes est qu'une couverture parfaite est possible sous certaines hypothèses.

Modélisation de l'incertain

Hypothèse : un **seul** titre risqué dont le prix à la date n est S_n .

- ▶ $S_{n+1} = r u S_n$ en cas de **hausse** avec $d < 1 < u$
- ▶ $S_{n+1} = r d S_n$ en cas de **baisse** avec $d < 1 < u$
- ▶ $Y_n = 1$ en cas de hausse, et 0 sinon

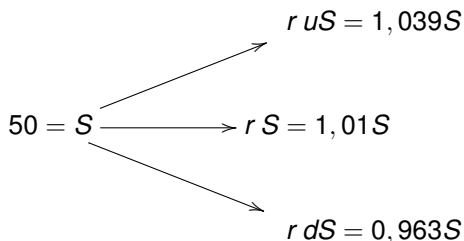


Figure: Mouvement de l'actif risqué.

Stratégie de portefeuille

Stratégie : Une stratégie est la répartition entre cash et action de son investissement initial. Les signes positifs ou négatif traduisent qu'on est acheteur ou vendeur.

Le modèle binomial à une période

- ▶ La valeur initiale du portefeuille $X_0 = x$ est décomposée en
 - un nombre d'action δ_1
 - montant à la banque $x - \delta_1 S_0$
- ▶ Demain, deux valeurs possibles
 - $X_1^u = (x - \delta_1 S_0)r + \delta_1 S_0 r u = x r + \delta_1 S_0 r (u - 1)$
 - $X_1^d = (x - \delta_1 S_0)r + \delta_1 S_0 r d = x r + \delta_1 S_0 r (d - 1)$
- ▶ En bref, $X_1 = X_0 r + \delta_1 S_0 r U_1$ où $U_1 = (u - 1)Y_1 + (d - 1)(1 - Y_1)$.

Modèle à une période

- ▶ L'objectif est d'atteindre $f(S_0 r u) = (ur S_0 - K)^+$ en cas de hausse, et $f(S_0 r d) = (rd S_0 - K)^+$ en cas de baisse.
- ▶ Il faut résoudre le système,

$$x r + \delta_1 r(u - 1)S_0 - f(S_0 r u) = 0, \quad x r + \delta_1 r(d - 1)S_0 - f(S_0 r d) = 0$$

- ▶ la solution est

$$x = r^{-1} \left(\frac{1-d}{u-d} f(S_0 r u) + \frac{u-1}{u-d} f(S_0 r d) \right)$$

- ▶ C'est une **moyenne** car $q = \frac{1-d}{u-d} \in (0, 1)$ et $\frac{u-1}{u-d} = 1 - q$
- ▶ La **quantité d'action** à détenir est la **dérivée discrète**

$$\delta_1 = \frac{f(S_0 r u) - f(S_0 r d)}{S_0 r(u - d)}$$

Dans le cas général

- ▶ le sous jacent $X - t$ varie de manière infinitesimale mais aléatoire
- ▶ pas à variation finie
- ▶ mais on peut donner un sens à la différentiel stochastique
- ▶ Calcul d'Itô des années 40-50

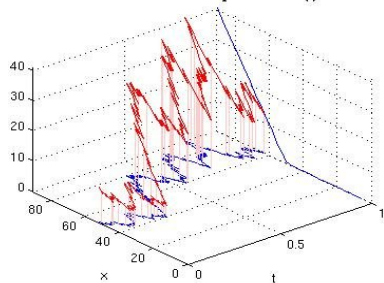
Portfeuille de couverture= un problème de cible

Equation $dV_t = \delta_t dX_t$, Cible : $V_T = (X_T(\omega) - K)^+$

Objectif : Atteindre la cible, ou du moins ne pas passer trop près
Etre capable de calculer

Call(50,50): Portefeuille de couverture d'une option d'achat (50,50) (
blue= trajectoire de X, red= valeur du portefeuille, green= la quantité inverstie)

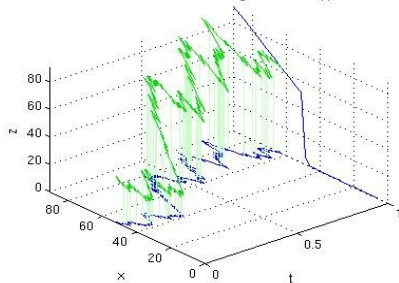
simulation of stochastic phenomena: Y(t)



center

right

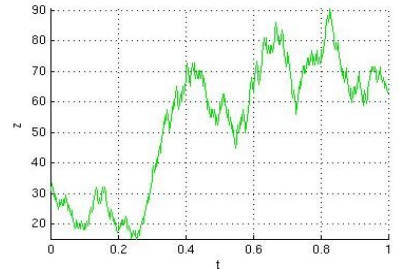
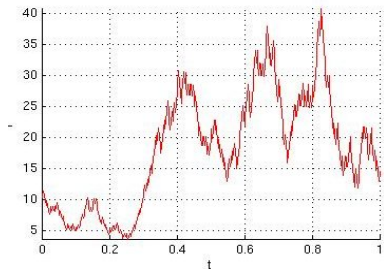
simulation of stochastic phenomena: z(t)



up

more

Close



L'équation aux dérivées partielles de pricing

- ▶ Supposons que le bruit soit un brownien (gaussien) de variance $\sigma^2 t$
- ▶ Le paramètre σ est le paramètre clé,

appelé la **volatilité**.

Theorem (Evaluation et couverture)

Soit une solution régulière de l'EDP de pricing

$$u'_t(t, x) + \frac{1}{2} u''_{xx}(t, x) x^2 \sigma^2 + u'_x(t, x) x r - u(t, x) r = 0, \quad u(T, x) = h(x) \quad (1)$$

$u(t, S_t)$ est le prix en t de l'option et le portefeuille de couverture est donné par

$$\delta(t, S_t) = u'_x(t, S_t)$$

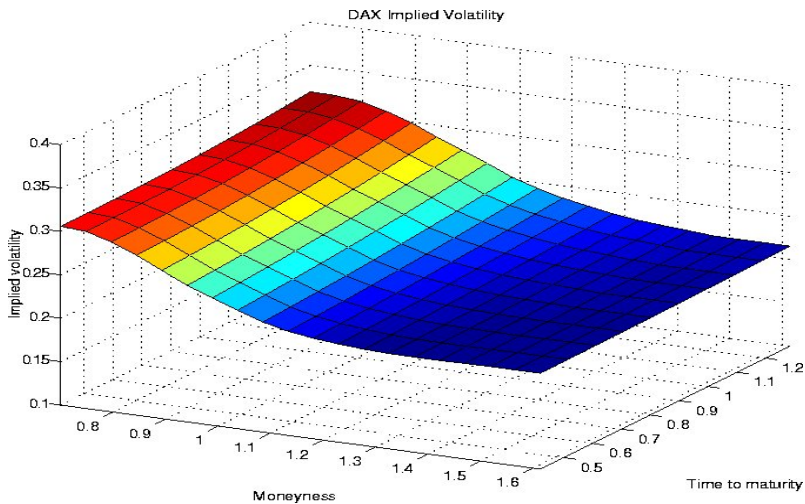
L'identification des paramètres

- ▶ En général, le marché n'utilise pas les données passées du spot, mais les prix du jour des options côtées. Cela n'est possible car **seul un paramètre est inconnu**.
- ▶ Ils traduisent l'information donnée par les prix d'options côtées dans le marché en terme d'un paramètre dans la formule de BS. C'est de qu'on appelle la **volatilité implicite** Σ^{imp} .

$$C^{obs}(T, K) = C^{BS}(t_0, x_0, T, K, \Sigma^{imp})$$

- ▶ La couverture est facile à calculer quotidiennement en utilisant la volatilité implicite

Surface de volatilité implicite



L'aspect numérique

Les méthodes numériques, efficaces et rapides pour obtenir des prix et des hedges en quelques secondes sont très importantes. **Méthodes numériques probabilistes**

- ▶ Les méthodes probabilistes se sont imposées dans les problèmes de grande dimension, grâce aux nouvelles capacités de calcul offertes par les ordinateurs.
- ▶ Les **méthodes de Monte Carlo**, basées sur la simulation d'un grand nombre de scénarios sont efficaces en général, si on fait des petites transformations astucieuses pour réduire la variance de la variable dont on calcule l'espérance.
- ▶ Dans la salle de marché, il faut trouver des méthodes plus systématiques, car il est nécessaire de pouvoir calculer facilement la valorisation de l'activité agrégée.

Les limites

A propos des hypothèses

- ▶ J'ai présenté une problématique idéale, assez robuste, et très utilisée.
- ▶ Elle est plus simple et plus robuste à mettre en oeuvre sur un sous-jacent que sur plusieurs.
- ▶ Elle sous-entend que le risque résiduel est petit, ce qui est difficile à tester.
- ▶ La procédure de calibration n'est pas très stable et est difficile à mettre en oeuvre sur des produits plus complexes.
- ▶ Il s'agit en fait de résoudre des problèmes **inverses** "mal-posés" au sens de l'analyse numérique, difficiles en plusieurs dimensions.
- ▶ Comme toujours en finance, on a l'impression d'avoir à faire à un problème classique, mais ce n'est en général pas le cas.

Plan

- 1 Des concepts nouveaux pour des risques nouveaux
- 2** Risque de modèle

Qu'est-ce qu'un modèle

- ▶ Un modèle est une **représentation simplifiée** d'une réalité complexe, qui permet de quantifier une **décision**
- ▶ Un modèle est donc **indissociable** de l'activité pour laquelle il a été mis en place, et des conditions de marché associées.
- ▶ **Plusieurs** modèles sont éventuellement possibles : **Risque de modèles**
- ▶ Front-Office et Risk Management n'ont pas les **mêmes objectifs**, et donc éventuellement pas les mêmes modèles

Commentaires de Robert Merton

- ▶ **Merton, Prix Nobel** dans Influence of mathematical models in finance on practice: past, present and future 1995.

Une vertu peut devenir un **vice** si elle est utilisée de manière extrême :

- Exactement comme pour les **modèles mathématiques** en finance. Il faut rappeler sans cesse les précautions à prendre avec eux.
 - Le praticien devrait appliquer le modèle à l'essai, et bien **préciser ses limites** pour chaque application
- ▶ Particulièrement vrai sur des **nouveaux dérivés** : ex Back-Testing,

L'éclairage de la crise

- ▶ Toute la **méthodologie** est basée sur l'AOA, et une grande liquidité. Largement remise en cause dans la crise
- ▶ Le **postulat** que les options n'influent pas sur la valeur du sous-jacent est clairement à remettre en partie en cause.
- ▶ La question de la **taille** des pauses est difficile à contrôler
- ▶ L'augmentation de l'activité entre 2004 et 2007 a conduit à la recherche de solutions automatiques qui minimisent la recherche de risques par produits
- ▶ Un business plus orienté **directionnel** que **prise de risque clients**

La formation

- ▶ nous avons été dans une bulle pour la formation
- ▶ les débouchés vont être durs dans les années à venir
- ▶ plus que jamais il faut former des gens compétents, techniquement, financièrement et éthiquement.
- ▶ les marchés ne vont pas disparaître, au contraire, ils vont continuer à s'appuyer sur les moyens High Tech qui sont à leur disposition.
- ▶ Comment surveiller et contrôler cette activité. On surveille bien les médicaments, la nourriture, pourquoi pas les marchés.
- ▶ Comment former mieux les gens intéressés.?

En guise de conclusion

- ▶ Etre scientifique dans le monde réel est très ambigu
- ▶ Même si on peut dégager des principes théoriques, le monde de la finance ne se reproduit pas, et n'est pas "rationnel".
- ▶ Importance très grande de l'organisation des marchés, qui a beaucoup plus d'impact que tout ce qui est lié au modèle

Conclusion avec Yves Meyer

- ▶ Les mathématiques traduisent certes, l'amour du beau langage et de la forme,
- ▶ mais la connaissance scientifique, la curiosité, la créativité est un autre aspect majeur.
- ▶ Apprendre aux jeunes à démêler le vrai du faux et à penser par eux-mêmes me semble un enjeu primordial, y compris pour former les citoyens.