Introduction à l'optimisation de forme

Antoine Henrot

Institut Élie Cartan Nancy - Université de Lorraine

Journées Nationales de l'APMEP - 28 octobre 2012

Contenu de la présentation

Exemples de problèmes d'optimisation de forme

- Problèmes académiques
- Problèmes industriels

Questions mathématiques

- Existence
- Propriétés géométriques
- Conditions d'optimalité
- Calcul de la solution

Quelques problèmes ouverts

- Le carré opaque
- La conjecture de Kelvin
- Les corps de largeur constante

Optimisation

Optimisation discrète :

$$\min J(x)$$
$$x \in \mathbb{N}$$

recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, optimisation dans les graphes, complexité...

Optimisation en dimension finie :

$$\min J(x)$$
$$x \in D \subset \mathbb{R}^N$$

conditions d'optimalité, J différentiable ou non différentiable, analyse convexe, algorithmique...

Calcul des variations :

$$\min J(u)$$
$$u \in H$$

méthodes variationnelles en mécanique, physique, économie... existence, caractérisation...

Optimisation de forme :

$$\min J(\Omega)$$
$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

existence, propriétés géométriques, conditions d'optimalité, calcul explicite

Contenu de la présentation

Exemples de problèmes d'optimisation de forme
- Problèmes académiques
- Problèmes industriels

Questions mathématiques
- Existence
- Propriétés géométriques
- Conditions d'optimalité
- Calcul de la solution

Quelques problèmes ouverts
- Le carré opaque
- La conjecture de Kelvin
- Les corps de largeur constante

Inégalité isopérimétrique (1)

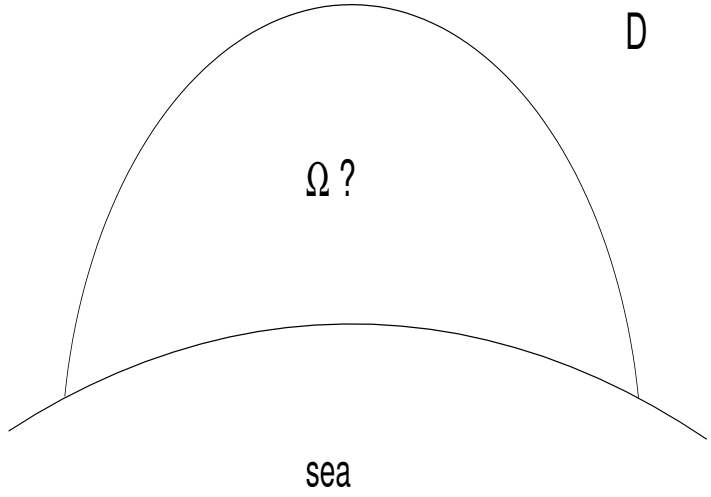


FIGURE: Problème de la Reine Didon

Inégalité isopérimétrique (1)

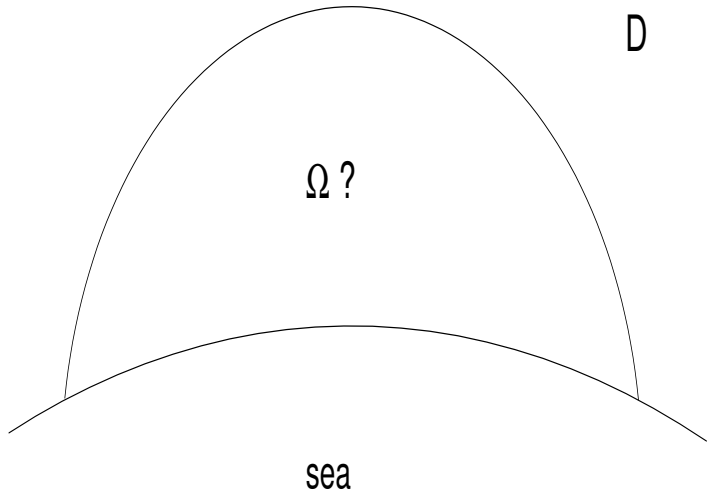


FIGURE: Problème de la Reine Didon

Mathématiquement, soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et c un réel donné, trouver $\Omega \subset D$ avec un périmètre $P(\Omega) = c$ fixé qui a une surface $A(\Omega)$ maximum.

Inégalité isopérimétrique (2)

C'est le problème d'optimisation de forme :

$$\max\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\} \tag{1}$$

où $A(\Omega)$ désigne l'aire du domaine Ω et $P(\Omega)$ son périmètre.

Inégalité isopérimétrique (2)

C'est le problème d'optimisation de forme :

$$\max\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\} \tag{1}$$

où $A(\Omega)$ désigne l'aire du domaine Ω et $P(\Omega)$ son périmètre.
ou, plus généralement

$$\max\{V(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^N,\ P(\Omega) = c\} \tag{2}$$

où $V(\Omega)$ désigne le volume du domaine Ω et $P(\Omega)$ la surface $N-1$-dimensionnelle de son bord.

Inégalité isopérimétrique (2)

C'est le problème d'optimisation de forme :

$$\max\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\} \tag{1}$$

où $A(\Omega)$ désigne l'aire du domaine Ω et $P(\Omega)$ son périmètre.
ou, plus généralement

$$\max\{V(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^N,\ P(\Omega) = c\} \tag{2}$$

où $V(\Omega)$ désigne le volume du domaine Ω et $P(\Omega)$ la surface $N-1$-dimensionnelle de son bord.

Si $D = \mathbb{R}^N$, la solution de (2) est la boule (Steiner 1842, Schwarz 1890, De Giorgi 1954)

Inégalité isopérimétrique (3)

Le résultat précédent peut s'écrire comme une inégalité : pour toute surface fermée Σ dans $\mathbb{R}^N$

$$P(\Sigma) \geq P(\text{Sphère englobant le même volume}).$$

Inégalité isopérimétrique (3)

Le résultat précédent peut s'écrire comme une inégalité :
pour toute surface fermée Σ dans $\mathbb{R}^N$

$$P(\Sigma) \geq P(\text{Sphère englobant le même volume}).$$

Pour le problème de la Reine Didon (en toute dimension), on a le résultat

Théorème (Choe-Ghomi-Retore 2007)

Soit C un convexe et Ω un ensemble inclus dans $\mathbb{R}^N \setminus C$ de bord Σ. Alors

$$P(\Sigma) \geq P(\textit{demi-sphère de même volume que } \Omega)$$

(avec égalité seulement si Ω est une demi-boule).

Inégalité isopérimétrique quantitative (1)

Question : si un domaine a un périmètre assez proche de celui de la boule de même volume, de combien est-il "proche" de la boule ?

Inégalité isopérimétrique quantitative (1)

Question : si un domaine a un périmètre assez proche de celui de la boule de même volume, de combien est-il "proche" de la boule ?

Comment mesurer la proximité à la boule ?

Inégalité isopérimétrique quantitative (1)

Question : si un domaine a un périmètre assez proche de celui de la boule de même volume, de combien est-il "proche" de la boule ?

Comment mesurer la proximité à la boule ?

On définit l'asymétrie (de Fraenkel) d'un domaine Ω par

$$\alpha(\Omega) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|\Omega \Delta B_x|}{|B_0|}$$

où B_x est la boule de même volume que Ω centrée en x.

Inégalité isopérimétrique quantitative (1)

Question : si un domaine a un périmètre assez proche de celui de la boule de même volume, de combien est-il "proche" de la boule ?

Comment mesurer la proximité à la boule ?

On définit l'asymétrie (de Fraenkel) d'un domaine Ω par

$$\alpha(\Omega) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|\Omega \Delta B_x|}{|B_0|}$$

où B_x est la boule de même volume que Ω centrée en x.

Il existe d'autres types de distance (distance de Hausdorff par exemple) moins bien adaptées à ce type de question.

Inégalité isopérimétrique quantitative (2)

On introduit aussi le déficit isopérimétrique de Ω :

$$\delta(\Omega) := \frac{P(\Omega) - P(B)}{P(B)}$$

où B est la boule de même volume que Ω. On a alors

Inégalité isopérimétrique quantitative (2)

On introduit aussi le déficit isopérimétrique de Ω :

$$\delta(\Omega) := \frac{P(\Omega) - P(B)}{P(B)}$$

où B est la boule de même volume que Ω. On a alors

Théorème (Fusco-Maggi-Pratelli 2007)

Il existe une constante C_N (ne dépendant que de la dimension) telle que

$$\alpha^2(\Omega) \leq C_N \delta(\Omega). \tag{3}$$

Inégalité isopérimétrique quantitative (2)

On introduit aussi le déficit isopérimétrique de Ω :

$$\delta(\Omega) := \frac{P(\Omega) - P(B)}{P(B)}$$

où B est la boule de même volume que Ω. On a alors

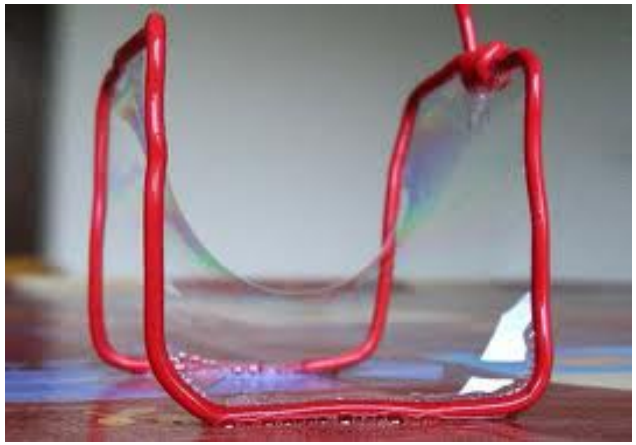
Théorème (Fusco-Maggi-Pratelli 2007)

Il existe une constante C_N (ne dépendant que de la dimension) telle que

$$\alpha^2(\Omega) \leq C_N \delta(\Omega). \tag{3}$$

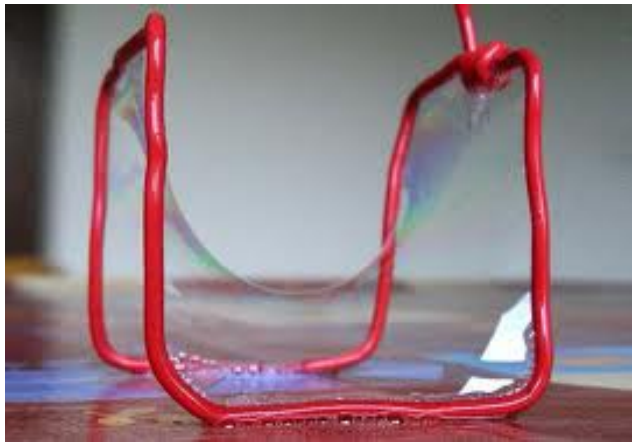
Question ouverte : trouver la meilleure constante C_N et le domaine (autre que la boule) qui réalise l'égalité.

Surfaces minima (films de savon)



Soit γ une courbe donnée dans $\mathbb{R}^3$, on cherche une surface dont le bord est γ et qui soit d'aire minimale (qui minimise son énergie de tension superficielle).

Surfaces minima (films de savon)



Soit γ une courbe donnée dans $\mathbb{R}^3$, on cherche une surface dont le bord est γ et qui soit d'aire minimale (qui minimise son énergie de tension superficielle).

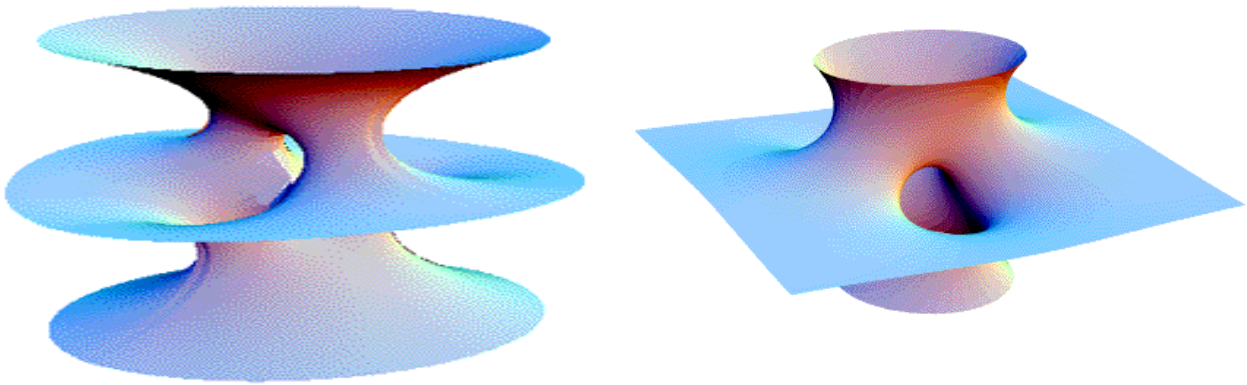


FIGURE: Horgan's minimal surface, Costa's minimal surface

Problèmes de valeurs propres

On appelle valeur propre d'un domaine (plan) Ω, les fréquences de vibration d'un tambour dont la forme de la membrane est Ω. On les note $\lambda_k(\Omega), k = 1, 2, \ldots$ ce sont les valeurs propres du Laplacien sur l'ouvert Ω avec conditions au bord de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{dans} \quad \Omega \\ u_k = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Problèmes de valeurs propres

On appelle valeur propre d'un domaine (plan) Ω, les fréquences de vibration d'un tambour dont la forme de la membrane est Ω. On les note $\lambda_k(\Omega), k = 1, 2, \ldots$ ce sont les valeurs propres du Laplacien sur l'ouvert Ω avec conditions au bord de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{dans} \quad \Omega \\ u_k = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

On peut rechercher la forme de tambour qui produit la note la plus basse, cela revient à minimiser $\lambda_1(\Omega)$ parmi les ensembles de volume donné.

Problèmes de valeurs propres

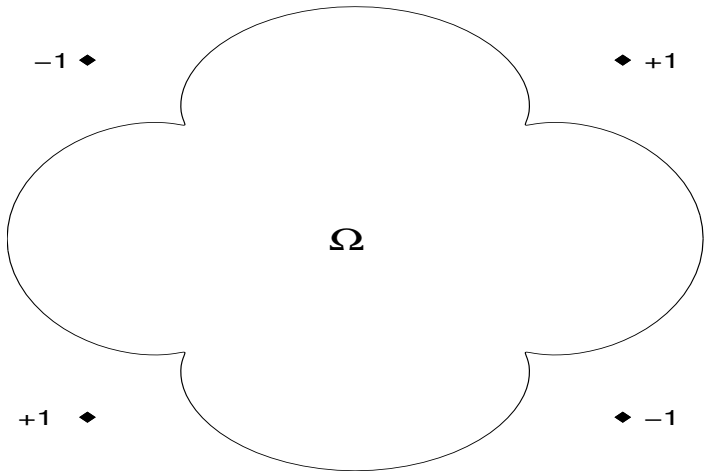
On appelle valeur propre d'un domaine (plan) Ω, les fréquences de vibration d'un tambour dont la forme de la membrane est Ω. On les note $\lambda_k(\Omega), k = 1, 2, \ldots$ ce sont les valeurs propres du Laplacien sur l'ouvert Ω avec conditions au bord de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{dans} \quad \Omega \\ u_k = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

On peut rechercher la forme de tambour qui produit la note la plus basse, cela revient à minimiser $\lambda_1(\Omega)$ parmi les ensembles de volume donné.

Nous verrons plus loin que la solution est le tambour circulaire (problème posé par Lord Rayleigh en 1894).

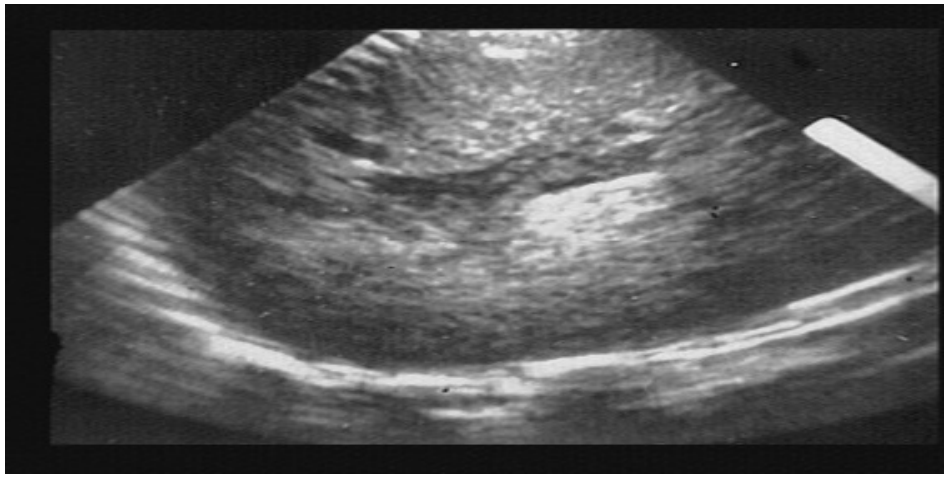
Formage électromagnétique



On veut minimiser l'énergie totale
$J(\Omega) := \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega^c} |\nabla\psi(x)|^2 \, dx - \int_{\Omega^c} j_0\psi(x) \, dx + \tau P(\Omega)$ où ψ est le potentiel électromagnétique, solution de

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \mu_0 j_0 & \text{dans} \quad \Omega^c \\ \psi = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Segmentation d'image

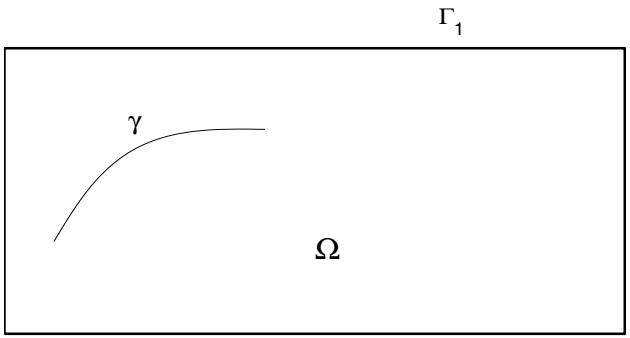


Une image est une fonction $g(x, y) : D \to [0, 1]$ représentant le "niveau de gris". Segmenter une image consiste à identifier des zones de niveau de gris homogène. Une modélisation proposée par Mumford and Shah en 1985 consiste à minimiser la fonctionelle :

$$J(K, u) := a \int_D (u - g)^2 \, dx + b \int_{D \setminus K} |\nabla u(x)|^2 \, dx + c \, \text{Longueur}(K)$$

Identification de fractures ou défauts

On veut identifier des défauts dans un matériau sans intrusion (contrôle non destructif). Le potentiel (ou la température) u_γ est solution de

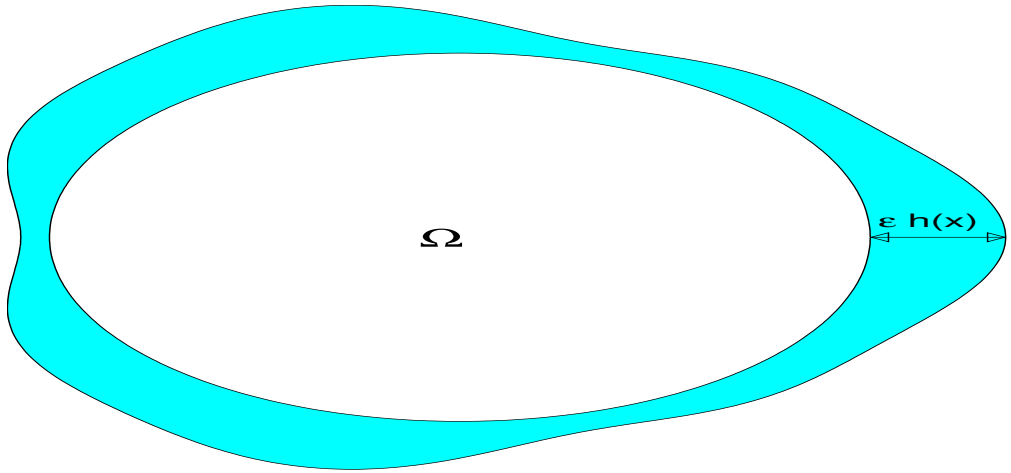


$$\begin{cases} \Delta u_\gamma = 0 & \text{dans} \quad \Omega \setminus \gamma \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \gamma \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial n} = f & \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

On mesure $u_\gamma = g$ sur une partie Γ_1 du bord et on cherche à reconstituer γ en minimisant

$$J(\gamma) = \int_{\Gamma_1} (u_\gamma - g)^2 \, dx\,.$$

Renforcement ou isolation

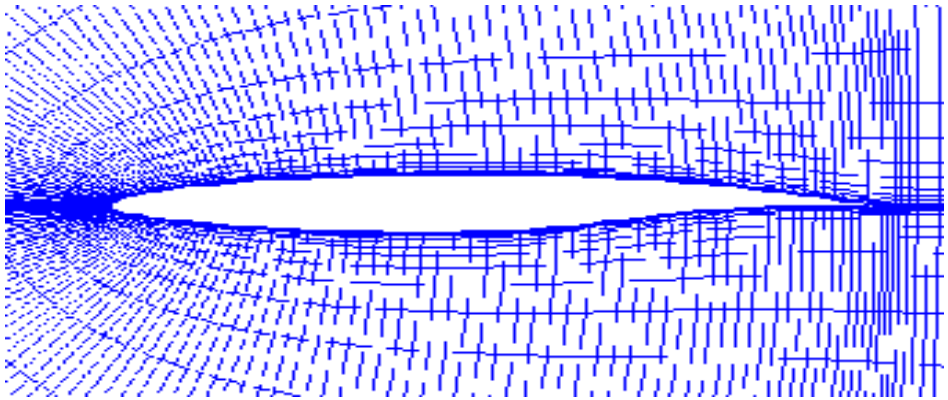


Il peut s'agir de renforcer ou isoler au mieux un tuyau, une structure...

Par exemple, on peut chercher à minimiser (par rapport à l'épaisseur h), la première valeur propre $\lambda_1(\Omega, \varepsilon, h)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left[(\chi_\Omega + \varepsilon(1-\chi_\Omega))\,\nabla\phi\right] = \lambda(\Omega,\varepsilon,h)\phi & \text{dans } \Omega_\varepsilon(h) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon(h)\ . \end{cases}$$

Aéronautique



L'une des questions les plus étudiées est de minimiser la trainée de l'aile A :

$$\mathcal{T} = \int_A \left(\mu(\nabla u + \nabla u^T) + P\mathbb{I} \right) \mathbf{n}.u_\infty$$

où u est la vitesse du fluide, μ sa viscosité, P sa pression. On obtient ces quantités en résolvant par exemple les équations de Navier-Stokes.

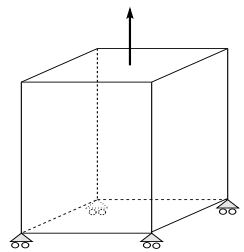
Furtivité radar

FIGURE: Avion furtif F117

FIGURE: Sous-marin furtif

Il s'agit de minimiser la SER Surface Equivalente Radar : c'est la valeur de la surface plane qui renverrait la même énergie que l'avion ou le sous-marin. On peut agir, soit sur le revêtement, soit sur la forme (remplacer les formes en dièdre par des formes arrondies ou planes).

Optimisation de structure



Il s'agit de minimiser la compliance définie par

$$c(\omega) = \int_{\partial\Omega_L} f \cdot u = \int_{\omega} Ae(u) \cdot e(u). \tag{4}$$

où u est le déplacement, $e(u)$ l'énergie élastique, A le tenseur, f les forces appliquées.

Optimisation de structure : exemples

Exemple du cantilever (ou bras de grue). On cherche une structure qui soit la plus solide, mais aussi la plus légère possible...

Optimisation de structure : exemples

Exemple d'un pont. Il repose sur 4 pieds on calcule les contraintes et on optimise sa forme pour qu'il soit le plus léger possible avec un niveau de contraintes satisfaisant.

Optimisation de structure : exemples

Exemple d'une étoile de mer : quelle forme peut-on imaginer pour un organisme marin reposant au fond de la mer et soumis à la pression de l'eau au-dessus de lui ?

Contenu de la présentation

Exemples de problèmes d'optimisation de forme
- Problèmes académiques
- Problèmes industriels

Questions mathématiques
- Existence
- Propriétés géométriques
- Conditions d'optimalité
- Calcul de la solution

Quelques problèmes ouverts
- Le carré opaque
- La conjecture de Kelvin
- Les corps de largeur constante

Optimisation de forme

On veut donc résoudre un problème de minimisation

$$\min\{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}_d\}$$

où

- $\mathcal{A}_d$ est la classe des domaines admissibles (un domaine est un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$)
- $J(\Omega)$ est souvent (mais pas toujours) de la forme $J(\Omega) = j(\Omega, u_\Omega)$ où u_Ω (l'état) est la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) sur Ω (l'équation d'état).

Questions Mathématiques

Voici le type de questions qu'on souhaite regarder :

- Existence d'une solution.
  Outils : *compacité de la classe des domaines pour une certaine distance, continuité du critère*

Questions Mathématiques

Voici le type de questions qu'on souhaite regarder :

- Existence d'une solution.
  Outils : *compacité de la classe des domaines pour une certaine distance, continuité du critère*
- Régularité et propriétés géométriques de la solution.
  Outils : *Régularité pour des problèmes à frontière libre, symétrisation, méthode des hyperplans mobiles...*

Questions Mathématiques

Voici le type de questions qu'on souhaite regarder :

- Existence d'une solution.
  Outils : *compacité de la classe des domaines pour une certaine distance, continuité du critère*
- Régularité et propriétés géométriques de la solution.
  Outils : *Régularité pour des problèmes à frontière libre, symétrisation, méthode des hyperplans mobiles...*
- Conditions d'optimalité.
  Outils : *Dérivation par rapport au domaine, Lagrangien*

Questions Mathématiques

Voici le type de questions qu'on souhaite regarder :

- Existence d'une solution.
  Outils : *compacité de la classe des domaines pour une certaine distance, continuité du critère*
- Régularité et propriétés géométriques de la solution.
  Outils : *Régularité pour des problèmes à frontière libre, symétrisation, méthode des hyperplans mobiles...*
- Conditions d'optimalité.
  Outils : *Dérivation par rapport au domaine, Lagrangien*
- Calcul de la solution.
  Outils : *variation du bord, méthodes de level sets, optimisation topologique...*

Existence d'une solution ?

Souvent, il n'existe pas de solution !

Existence d'une solution ?

Souvent, il n'existe pas de solution !

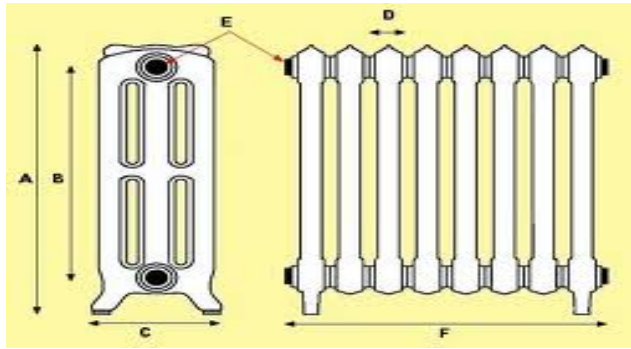
Contre-exemple 1 : En elasticité :
trouver une structure de poids donné la plus résistante possible.
Mathématiquement, les suites minimisantes convergent vers une structure homogénéisée.

Existence d'une solution ?

Souvent, il n'existe pas de solution !

Contre-exemple 1 : En elasticité :
trouver une structure de poids donné la plus résistante possible.
Mathématiquement, les suites minimisantes convergent vers une structure homogénéisée.

Contre-exemple 2 : En thermique :
Mettre de la glace dans un récipient pour aboutir à une température proche d'une température donnée. Ou trouver la forme optimale d'un radiateur !



Pour prouver l'existence (1)

Il faut compacité + continuité.

Pour prouver l'existence (1)

Il faut compacité + continuité.
Topologies possibles :

- Distance de Hausdorff

Pour prouver l'existence (1)

Il faut compacité + continuité.
Topologies possibles :

- Distance de Hausdorff
- Fonctions caractéristiques (mesure de la différence symétrique)

Pour prouver l'existence (1)

Il faut compacité + continuité.
Topologies possibles :

- Distance de Hausdorff
- Fonctions caractéristiques (mesure de la différence symétrique)

Compacité :

- Hausdorff : toute famille bornée est compacte
- Fonctions caractéristiques : toute famille à périmètre borné est compacte

Pour prouver l'existence (2)

Continuité : question difficile, il n'y a pas continuité en général quand il y a une EDP sous-jacente. Cela dépend aussi du type de conditions au bord (Dirichlet, Neumann...).

Pour prouver l'existence (2)

Continuité : question difficile, il n'y a pas continuité en général quand il y a une EDP sous-jacente. Cela dépend aussi du type de conditions au bord (Dirichlet, Neumann...).
Des conditions suffisantes dans le cas Dirichlet :

- convergence par l'intérieur

Pour prouver l'existence (2)

Continuité : question difficile, il n'y a pas continuité en général quand il y a une EDP sous-jacente. Cela dépend aussi du type de conditions au bord (Dirichlet, Neumann...).
Des conditions suffisantes dans le cas Dirichlet :

- convergence par l'intérieur
- si tous les domaines, ainsi que la limite sont "uniformément" réguliers

Pour prouver l'existence (2)

Continuité : question difficile, il n'y a pas continuité en général quand il y a une EDP sous-jacente. Cela dépend aussi du type de conditions au bord (Dirichlet, Neumann...).
Des conditions suffisantes dans le cas Dirichlet :

- convergence par l'intérieur
- si tous les domaines, ainsi que la limite sont "uniformément" réguliers
- En dimension deux, si les domaines n'ont pas trop de "trous"

Propriétés géométriques : symétrie (1)

Question (Lord Rayleigh, the Theory of Sound 1894) : Quelle est la forme du tambour qui produit la plus basse note ?

Propriétés géométriques : symétrie (1)

Question (Lord Rayleigh, the Theory of Sound 1894) : Quelle est la forme du tambour qui produit la plus basse note ?

La note produite par un tambour est une fréquence propre ou valeur propre du Laplacien avec condition de Dirichlet.

La question est donc : quelle est la forme du domaine Ω qui a la plus petite valeur propre ?

Propriétés géométriques : symétrie (1)

Question (Lord Rayleigh, the Theory of Sound 1894) : Quelle est la forme du tambour qui produit la plus basse note ?

La note produite par un tambour est une fréquence propre ou valeur propre du Laplacien avec condition de Dirichlet.

La question est donc : quelle est la forme du domaine Ω qui a la plus petite valeur propre ?

Théorème (Faber-Krahn 1923)

C'est le disque qui minimise la première valeur propre du Laplacien.

Démonstration : par symétrisation.

Propriétés géométriques : symétrie (2)

Autre question similaire : quelle est la barre la plus rigide ?

La rigidité torsionnelle d'une barre de section Ω est définie par $R(\Omega) = \int_\Omega u_\Omega(x)\,dx$ où u_Ω est la solution de l'EDP

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = 1 & \text{dans} \quad \Omega \\ u_\Omega = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Propriétés géométriques : symétrie (2)

Autre question similaire : quelle est la barre la plus rigide ?

La rigidité torsionnelle d'une barre de section Ω est définie par $R(\Omega) = \int_\Omega u_\Omega(x)\,dx$ où u_Ω est la solution de l'EDP

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = 1 & \text{dans} \quad \Omega \\ u_\Omega = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Théorème (Polya 1960) : La barre la plus rigide est la barre de section circulaire.

Outil : la symétrisation (ou réarrangement)

Elle consiste à remplacer une fonction positive u par une nouvelle fonction u^* dont les ensembles de niveau sont des boules de même volume que les ensembles de niveau correspondants de u.

Outil : la symétrisation (ou réarrangement)

Elle consiste à remplacer une fonction positive u par une nouvelle fonction u^* dont les ensembles de niveau sont des boules de même volume que les ensembles de niveau correspondants de u.

Propriétés importantes de la symétrisation : On note Ω^* la boule de même volume que Ω

$$\int_{\Omega} F(u)\,dx = \int_{\Omega^*} F(u^*)\,dx \tag{5}$$

Outil : la symétrisation (ou réarrangement)

Elle consiste à remplacer une fonction positive u par une nouvelle fonction u^* dont les ensembles de niveau sont des boules de même volume que les ensembles de niveau correspondants de u.

Propriétés importantes de la symétrisation : On note Ω^* la boule de même volume que Ω

$$\int_{\Omega} F(u)\,dx = \int_{\Omega^*} F(u^*)\,dx \tag{5}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2\,dx \tag{6}$$

Preuve de l'inégalité de Rayleigh-Faber-Krahn

La fréquence fondamentale λ_1 d'une membrane Ω peut être définie par

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{v \text{ régulière}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega v(x)^2 \, dx}$$

où le minimum est atteint par une fonction positive u_1 qu'on appelle fonction propre.

Preuve de l'inégalité de Rayleigh-Faber-Krahn

La fréquence fondamentale λ_1 d'une membrane Ω peut être définie par

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{v \text{ régulière}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega v(x)^2 \, dx}$$

où le minimum est atteint par une fonction positive u_1 qu'on appelle fonction propre.

On introduit u_1^* la symétrisée de u_1 et on a

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2 \, dx}{\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2 \, dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega u_1(x)^2 \, dx} = \lambda_1(\Omega).$$

Calcul de la dérivée

Dans un problème d'optimisation du type

$$\min_{x \in \mathbf{X}} J(x)$$

pourquoi calcule-t-on la dérivée du critère J ?

- pour écrire des conditions d'optimalité : $J'(x) = 0$
- pour calculer une solution approchée :
  - méthodes de gradient ou méthodes de plus grande pente : $x_{n+1} = x_n - \rho J'(x_n)$
  - méthodes de Newton : $x_{n+1} = x_n - [D^2 J(x_n)]^{-1} J'(x_n)$

Dérivée par rapport au domaine (1)

La difficulté ici est qu'on ne peut pas dériver "naturellement" car la variable est Ω qui n'est pas un élément d'un espace vectoriel !

Dérivée par rapport au domaine (1)

La difficulté ici est qu'on ne peut pas dériver "naturellement" car la variable est Ω qui n'est pas un élément d'un espace vectoriel !

L'idée est de déformer le domaine Ω par un champ de vecteur $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on pose

$$\Omega_t = (Id + t\mathbf{V})(\Omega) = \{X + t\mathbf{V}(X),\, X \in \Omega\}$$

et la dérivée d'une quantité J dépendant de Ω, dans la direction $\mathbf{V}$ est définie par

$$dJ(\Omega, \mathbf{V}) := \lim_{t \to 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}\,.$$

Dérivée par rapport au domaine (2)

Par exemple si $J_1(\Omega) = \int_\Omega f dx$, on a

$$dJ_1(\Omega, \mathbf{V}) = \int_\Omega f' dx + \int_{\partial\Omega} f \mathbf{V}.n \, d\sigma \, .$$

Ainsi, la dérivée de l'aire est donnée par $dA(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}.n \, d\sigma \, .$

Dérivée par rapport au domaine (2)

Par exemple si $J_1(\Omega) = \int_\Omega f dx$, on a

$$dJ_1(\Omega, \mathbf{V}) = \int_\Omega f' dx + \int_{\partial\Omega} f \mathbf{V}.n \, d\sigma \, .$$

Ainsi, la dérivée de l'aire est donnée par $dA(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V}.n \, d\sigma$.
Tandis que si $J_2(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g d\sigma$, on a

$$dJ_2(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\partial\Omega} g' + [gC + \frac{\partial g}{\partial n}]\mathbf{V}.n \, d\sigma \, .$$

où C est la courbure du bord. Ainsi, la dérivée du périmètre est donnée par

$$dP(\Omega, \mathbf{V}) = \int_{\partial\Omega} C\mathbf{V}.n \, d\sigma$$

où C est la courbure.

Retour au problème de la Reine Didon

Il s'agissait du problème

$$\min\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\}.$$

Supposons qu'on ait montré qu'il existe un optimum Ω^* et que celui-ci est régulier (par exemple de classe C^2).

Retour au problème de la Reine Didon

Il s'agissait du problème

$$\min\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\}.$$

Supposons qu'on ait montré qu'il existe un optimum Ω^* et que celui-ci est régulier (par exemple de classe C^2).

Alors la condition d'optimalité va s'écrire : il existe un multiplicateur de Lagrange μ tel que

$$\forall \mathbf{V}, dA(\Omega, \mathbf{V}) = \mu dP(\Omega, \mathbf{V}).$$

Retour au problème de la Reine Didon

Il s'agissait du problème

$$\min\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\}.$$

Supposons qu'on ait montré qu'il existe un optimum Ω^* et que celui-ci est régulier (par exemple de classe C^2).

Alors la condition d'optimalité va s'écrire : il existe un multiplicateur de Lagrange μ tel que

$$\forall \mathbf{V}, dA(\Omega, \mathbf{V}) = \mu dP(\Omega, \mathbf{V}).$$

Soit

$$\forall \mathbf{V}, \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{V}.n\, d\sigma = \mu \int_{\partial\Omega^*} C\mathbf{V}.n\, d\sigma$$

Retour au problème de la Reine Didon

Il s'agissait du problème

$$\min\{A(\Omega),\ \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^2,\ P(\Omega) = c\}.$$

Supposons qu'on ait montré qu'il existe un optimum Ω^* et que celui-ci est régulier (par exemple de classe C^2).

Alors la condition d'optimalité va s'écrire : il existe un multiplicateur de Lagrange μ tel que

$$\forall \mathbf{V}, dA(\Omega, \mathbf{V}) = \mu dP(\Omega, \mathbf{V}).$$

Soit

$$\forall \mathbf{V}, \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{V}.n\, d\sigma = \mu \int_{\partial\Omega^*} C\mathbf{V}.n\, d\sigma$$

ce qui implique $\mu C = 1$ ou encore que la courbure est constante : le bord de Ω^* est un arc de cercle.

Dérivée par rapport au domaine (3)

Il reste à savoir dériver la solution d'une EDP par rapport au domaine. Désignons par u_Ω la solution d'une équation posée sur Ω
Difficultés :

- u_{Ω_t} et u_Ω ne sont pas définies sur le même domaine.
- Selon les conditions au bord considérées, les prolongements peuvent être compliqués.
- La régularité du domaine Ω joue aussi un rôle.

Calcul de la solution : paramétrisation

Comment représenter la forme ? On peut choisir :

- graphe, inconnues : composantes dans une certaine base
- polygone ou polyèdre, inconnues : coordonnées des sommets
- splines ou Bezier, inconnues : coordonnées des points de contrôle
- courbes de niveau (level sets), inconnues : fonction définie par exemple par ses coefficients de Fourier

Méthode (1) : Variation du bord

Méthode itérative : on a calculé une forme Ω_n, par exemple un polygone dont les sommets sont des points X_i.

1. On définit des directions de déplacement $\mathbf{V}_i$ pour chaque sommet X_i. L'inconnue devient l'intensité u_i du déplacement dans cette direction.

Méthode (1) : Variation du bord

Méthode itérative : on a calculé une forme Ω_n, par exemple un polygone dont les sommets sont des points X_i.

1. On définit des directions de déplacement $\mathbf{V}_i$ pour chaque sommet X_i. L'inconnue devient l'intensité u_i du déplacement dans cette direction.
2. On utilise la dérivée par rapport au domaine pour calculer le gradient du critère J par rapport aux u_i.

Méthode (1) : Variation du bord

Méthode itérative : on a calculé une forme Ω_n, par exemple un polygone dont les sommets sont des points X_i.

1. On définit des directions de déplacement $\mathbf{V}_i$ pour chaque sommet X_i. L'inconnue devient l'intensité u_i du déplacement dans cette direction.
2. On utilise la dérivée par rapport au domaine pour calculer le gradient du critère J par rapport aux u_i.
3. On remplace chaque sommet X_i par $\widehat{X}_i = X_i - \rho \frac{\partial J}{\partial u_i} \mathbf{V}_i$ (méthode de gradient à pas fixe). Le nouveau domaine Ω_{n+1} est le polygone dont les sommets sont les $\widehat{X}_i$.

Analyse de cette méthode

Inconvénients

- Elle ne permet pas de changer la topologie
- Elle s'arrête souvent en des minimas locaux
- Elle est coûteuse en remaillage (surtout en dimension trois)

Analyse de cette méthode

Inconvénients

- Elle ne permet pas de changer la topologie
- Elle s'arrête souvent en des minimas locaux
- Elle est coûteuse en remaillage (surtout en dimension trois)

Elle est néanmoins simple à mettre en oeuvre et c'est donc la plus utilisée et elle est assez efficace pour gagner 10-20% sur un critère.

Méthode numérique (2) : Relaxation

On remplace le "matériau" par un "matériau composite".
Mathématiquement, cela peut se faire en remplaçant la fonction caractéristique χ_Ω par une fonction φ pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et 1.

Méthode numérique (2) : Relaxation

On remplace le "matériau" par un "matériau composite". Mathématiquement, cela peut se faire en remplaçant la fonction caractéristique χ_Ω par une fonction φ pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et 1.

On fait alors directement l'optimisation sur φ en forçant tout au long de l'algorithme la fonction φ à prendre des valeurs de plus en plus proches de 0 et 1.

Méthode numérique (2) : Relaxation

On remplace le "matériau" par un "matériau composite". Mathématiquement, cela peut se faire en remplaçant la fonction caractéristique χ_Ω par une fonction φ pouvant prendre toutes les valeurs entre 0 et 1.

On fait alors directement l'optimisation sur φ en forçant tout au long de l'algorithme la fonction φ à prendre des valeurs de plus en plus proches de 0 et 1.

Plus généralement la relaxation en mathématiques consiste à rechercher la solution dans un espace plus grand où on sait qu'elle existe, puis ensuite à se rapprocher le plus possible de cette solution "relaxée" (qui n'est pas admissible).

Analyse de la méthode de relaxation

Inconvénients

- Elle converge en général vers des solutions non réalistes ou non "physiques"
- Pour corriger cet inconvénient, on choisit en général de pénaliser les valeurs de φ comprises entre 0 et 1, mais la solution qu'on obtient alors est fortement dépendante du maillage.
- Cette méthode peut être plus difficile à mettre en oeuvre

Elle est néanmoins très efficace quand on ne connait pas la topologie de la forme cherchée (élasticité, conduction...) et elle est beaucoup moins sensible à l'initialisation.

Prise en compte des contraintes

On a le plus souvent des contraintes (d'aire, de périmètre, géométriques...). On peut les traiter par

- pénalisation
- projection
- Lagrangien

Contenu de la présentation

Exemples de problèmes d'optimisation de forme
- Problèmes académiques
- Problèmes industriels

Questions mathématiques
- Existence
- Propriétés géométriques
- Conditions d'optimalité
- Calcul de la solution

Quelques problèmes ouverts
- Le carré opaque
- La conjecture de Kelvin
- Les corps de largeur constante

Le carré opaque (1)

Un promoteur achète un terrain carré. Il apprend que passe sous le terrain une ligne à haute tension. Comment déterminer l'emplacement de cette ligne en creusant une tranchée de longueur minimale ?

Le carré opaque (1)

Un promoteur achète un terrain carré. Il apprend que passe sous le terrain une ligne à haute tension. Comment déterminer l'emplacement de cette ligne en creusant une tranchée de longueur minimale ?

Mathématiquement, il s'agit donc de trouver un ensemble de segments de longueur minimale qui intercepte toute ligne droite passant par le carré.

Quelques candidats

On prend le carré de longueur unité

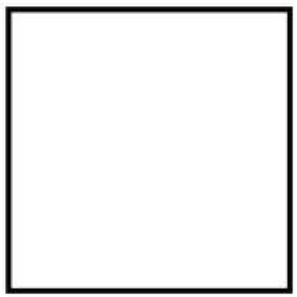


FIGURE: Les 4 côtés : longueur=4

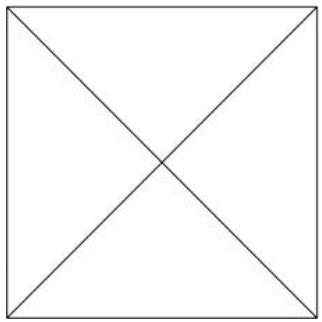


FIGURE: les 2 diagonales : longueur=$2\sqrt{2} \simeq 2.828$

Quelques candidats

On prend le carré de longueur unité

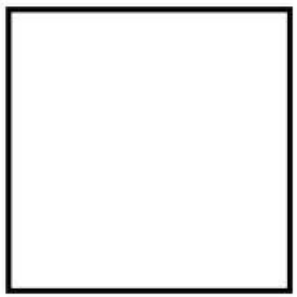


FIGURE: Les 4 côtés : longueur=4

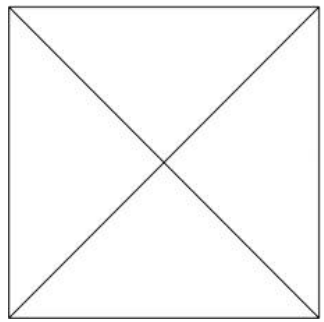


FIGURE: les 2 diagonales : longueur=$2\sqrt{2} \simeq 2.828$

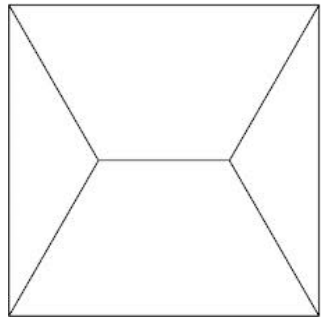


FIGURE: Arbre de Steiner : longueur=$\sqrt{3} + 1 \simeq 2.732$

La solution ?

and the winner is ... ?

La solution ?

and the winner is ... ?

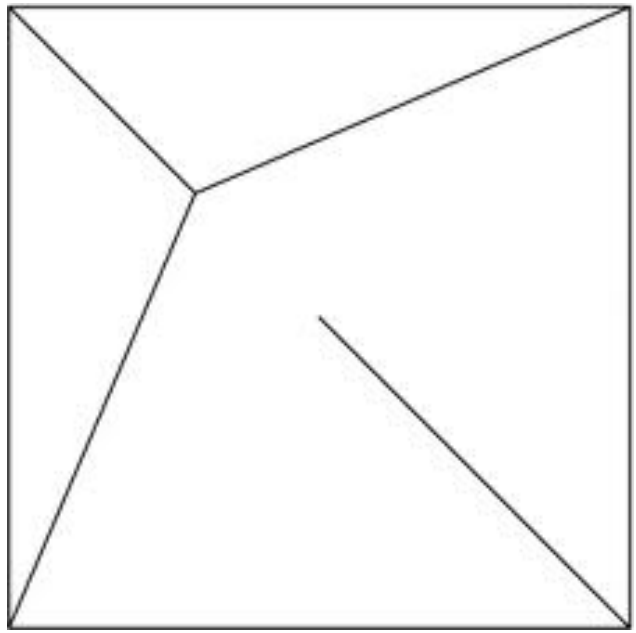


FIGURE: le candidat : longueur$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \simeq 2.639$

Problème ouvert : le montrer ou trouver un meilleur candidat !

Pavage de longueur minimale

Des ouvrier(e)s veulent constituer un réseau plan en utilisant le moins de matériau possible. Quelle forme doivent avoir les cellules de ce réseau ?

FIGURE: des nids d'abeille

Pavage de longueur minimale

Des ouvrier(e)s veulent constituer un réseau plan en utilisant le moins de matériau possible. Quelle forme doivent avoir les cellules de ce réseau ?

FIGURE: des nids d'abeille

On réalise un pavage du plan par des cellules ω_i de même aire. On recherche la forme des cellules qui minimise la longueur moyenne

$$\min\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(\gamma_i),\ \gamma_i = \partial\omega_i,\ A(\omega_i) = 1\}$$

The honeycomb conjecture

Les grecs déjà avaient conjecturé que le réseau hexagonal (ou nid d'abeille) était celui qui répondait à la question.

- En 340, Pappus d'Alexandrie fait une démonstration très partielle (comparant l'hexagone au triangle équilatéral et au carré).

The honeycomb conjecture

Les grecs déjà avaient conjecturé que le réseau hexagonal (ou nid d'abeille) était celui qui répondait à la question.

- En 340, Pappus d'Alexandrie fait une démonstration très partielle (comparant l'hexagone au triangle équilatéral et au carré).
- Dans les années 1940, H. Steinhaus étudie le cas où toutes les cellules sont identiques.
- En 1943, L.F. Toth prouve la conjecture sous l'hypothèse que les cellules sont convexes.

The honeycomb conjecture

Les grecs déjà avaient conjecturé que le réseau hexagonal (ou nid d'abeille) était celui qui répondait à la question.

- En 340, Pappus d'Alexandrie fait une démonstration très partielle (comparant l'hexagone au triangle équilatéral et au carré).
- Dans les années 1940, H. Steinhaus étudie le cas où toutes les cellules sont identiques.
- En 1943, L.F. Toth prouve la conjecture sous l'hypothèse que les cellules sont convexes.

La véritable démonstration complète n'a été trouvée que récemment

Théorème (T.C. Hales 1999)

Le pavage par des hexagones réguliers minimise la longueur moyenne parmi tous les pavages du plan par des cellules de même aire.

La conjecture de Kelvin

Il s'agit de la version tri-dimensionnelle du problème précédent : trouver un pavage de l'espace par des cellules de même volume dont la surface latérale moyenne est minimale.

La conjecture de Kelvin

Il s'agit de la version tri-dimensionnelle du problème précédent : trouver un pavage de l'espace par des cellules de même volume dont la surface latérale moyenne est minimale.

En 1884, Lord Kelvin a conjecturé que la solution de ce problème est donnée par des octahèdres tronqués à 14 côtés

FIGURE: Octahèdres de Kelvin

La conjecture de Kelvin (2)

Après plus de 100 ans d'efforts vains de scientifiques du monde entier pour montrer la conjecture de Kelvin...

La conjecture de Kelvin (2)

Après plus de 100 ans d'efforts vains de scientifiques du monde entier pour montrer la conjecture de Kelvin...

Stupéfaction : des chimistes D. Weaire et R. Phelan en 1994 découvrent numériquement une meilleure solution composée de polyèdres distincts, 6 polyèdres avec 14 faces et 2 polyèdres avec 12 faces irrégulières.

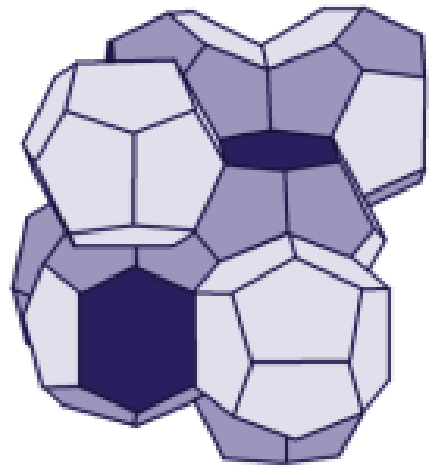


FIGURE: Les polyèdres de Weyre et Phelan

La conjecture de Kelvin (2)

Après plus de 100 ans d'efforts vains de scientifiques du monde entier pour montrer la conjecture de Kelvin...

Stupéfaction : des chimistes D. Weaire et R. Phelan en 1994 découvrent numériquement une meilleure solution composée de polyèdres distincts, 6 polyèdres avec 14 faces et 2 polyèdres avec 12 faces irrégulières.

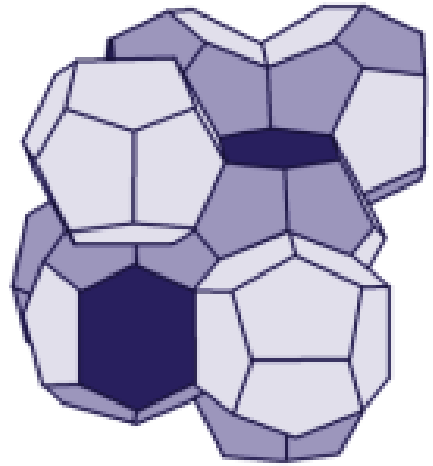


FIGURE: Les polyèdres de Weyre et Phelan

Problème ouvert : est-ce la meilleure solution ? Comment le prouver ?

Les corps de largeur constante

Un corps de largeur constante est un ensemble (convexe) qui a la même largeur dans toutes les directions.

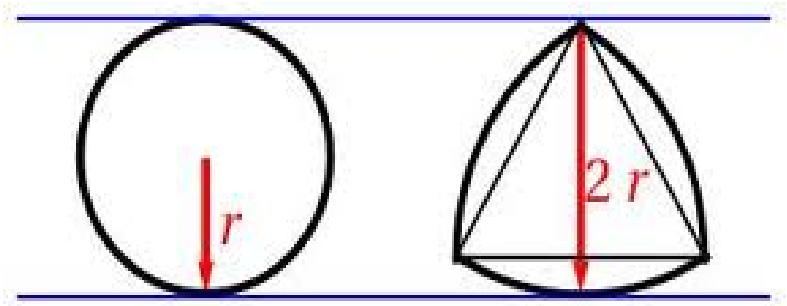


FIGURE: Deux corps de largeur constante (disque et triangle de Reuleaux)

Les corps de largeur constante

Un corps de largeur constante est un ensemble (convexe) qui a la même largeur dans toutes les directions.

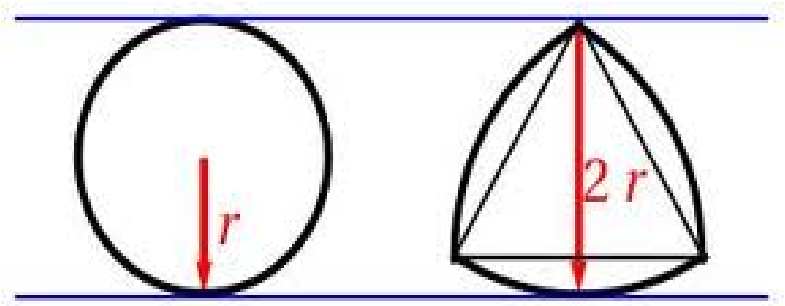


FIGURE: Deux corps de largeur constante (disque et triangle de Reuleaux)

Ils ont de nombreuses applications :

FIGURE: Pièce de 50 pence, Moteur de Wankel

Les corps de largeur constante (2)

Ils ont tous même périmètre :

Théorème (Barbier 1860)

Tout corps plan de largeur constante d a un périmètre égal à πd.

Les corps de largeur constante (2)

Ils ont tous même périmètre :

Théorème (Barbier 1860)

Tout corps plan de largeur constante d a un périmètre égal à πd.

Preuve : on utilise la formule de Crotton valable pour toute courbe γ du plan. Soit $n_\gamma(\ell)$ le nombre d'intersections de la droite ℓ avec γ. Alors si ℓ est paramétrée par $x\cos\phi + y\sin\phi + h = 0$ on a

$$P(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} n_\gamma(\ell)\, dh.$$

Les corps de largeur constante (2)

Ils ont tous même périmètre :

Théorème (Barbier 1860)

Tout corps plan de largeur constante d a un périmètre égal à πd.

Preuve : on utilise la formule de Crotton valable pour toute courbe γ du plan. Soit $n_\gamma(\ell)$ le nombre d'intersections de la droite ℓ avec γ. Alors si ℓ est paramétrée par $x\cos\phi + y\sin\phi + h = 0$ on a

$$P(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} n_\gamma(\ell)\, dh.$$

Concernant l'aire des corps de largeur constante :

Théorème (Blaschke-Lebesgue 1914-1915)

Le corps plan de largeur constante d'aire minimale est le triangle de Reuleaux, celui d'aire maximale est le disque.

Et en dimension 3 ?

Il en existe de nombreux, mais ils n'ont pas tous même surface (périmètre).

FIGURE: "Rolling stones" Palais de la Découverte

Et en dimension 3 ?

Il en existe de nombreux, mais ils n'ont pas tous même surface (périmètre).

FIGURE: "Rolling stones" Palais de la Découverte

Quel corps minimise le volume ?

La surface et le volume d'un corps K de largeur constante d sont liés par l'identité de Blaschke :

$$V(K) = \frac{1}{2}\, dS(K) - \frac{\pi}{3}\, d^3.$$

Donc minimiser le volume $\Longleftrightarrow$ minimiser la surface.

Problème ouvert Trouver le corps de largeur constante d (en dimension 3) qui minimise le volume (et la surface) parmi tous les corps de largeur constante d.

Meissner body

On suspecte que c'est le corps de Meissner qui est de volume minimal (parmi les corps de largeur constante)

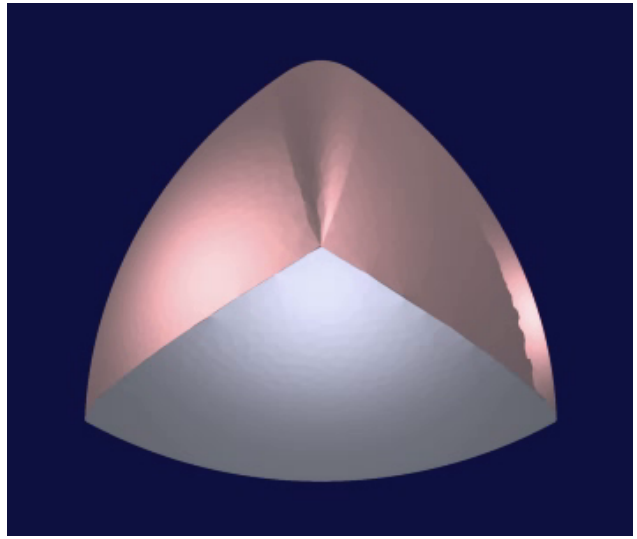


FIGURE: Meissner body

C'est fini

Merci pour votre attention bienveillante !