LA MEILLEURE ET LA PIRE DES ERREURS DE POINCARÉ

Cédric Villani

Univ. Lyon & Institut Henri Poincaré

Metz, APMEP, 27 octobre 2012

LA MEILLEURE ET LA PIRE DES ERREURS DE POINCARÉ

« La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit;
mais c'est cet éclair qui est tout »
H. Poincaré

Cédric Villani

Univ. Lyon & Institut Henri Poincaré

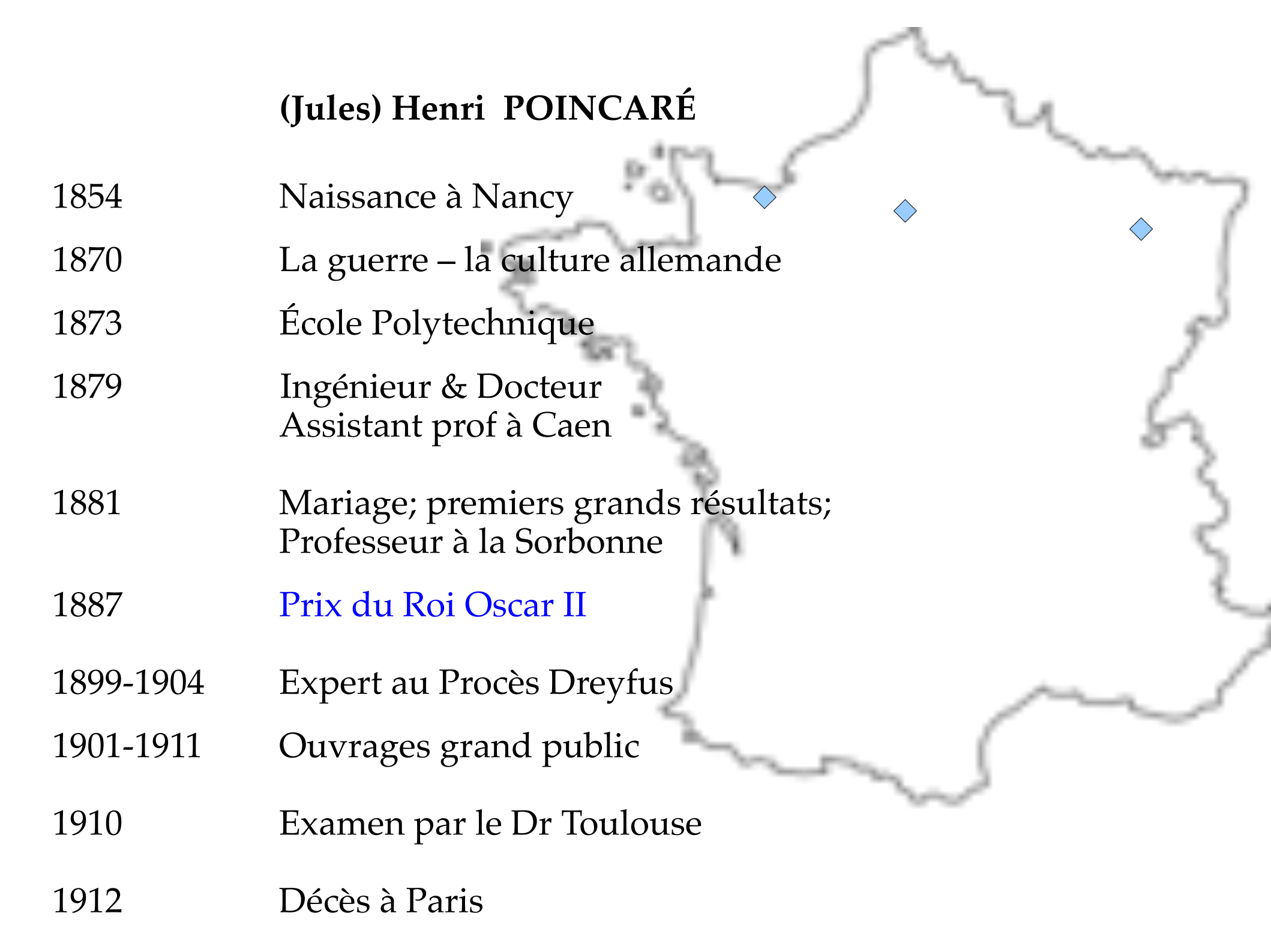
Metz, APMEP, 27 octobre 2012

(Jules) Henri POINCARÉ

1854	Naissance à Nancy
1870	La guerre – la culture allemande
1873	École Polytechnique
1879	Ingénieur & Docteur Assistant prof à Caen
1881	Mariage; premiers grands résultats; Professeur à la Sorbonne
1887	Prix du Roi Oscar II
1899-1904	Expert au Procès Dreyfus
1901-1911	Ouvrages grand public
1910	Examen par le Dr Toulouse
1912	Décès à Paris

(Jules) Henri POINCARÉ

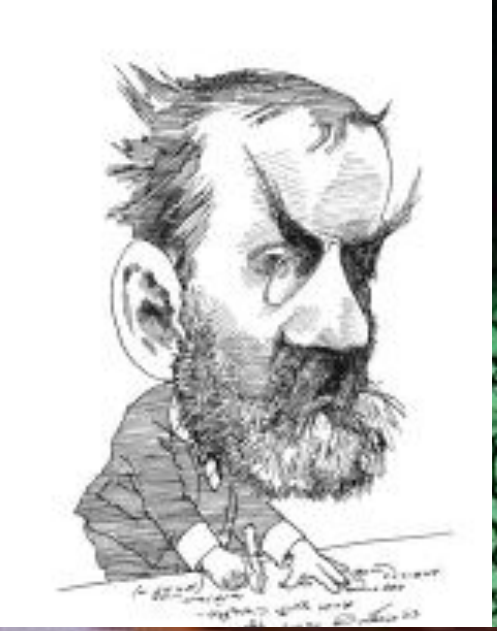
1854	Naissance à Nancy
1870	La guerre – la culture allemande
1873	École Polytechnique
1879	Ingénieur & Docteur Assistant prof à Caen
1881	Mariage; premiers grands résultats; Professeur à la Sorbonne
1887	Prix du Roi Oscar II
1899-1904	Expert au Procès Dreyfus
1901-1911	Ouvrages grand public
1910	Examen par le Dr Toulouse
1912	Décès à Paris

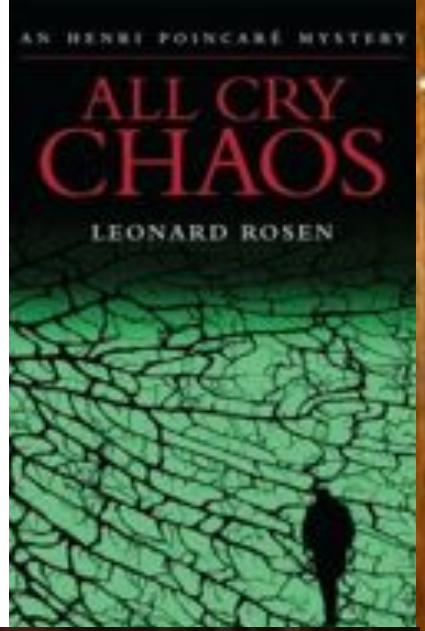


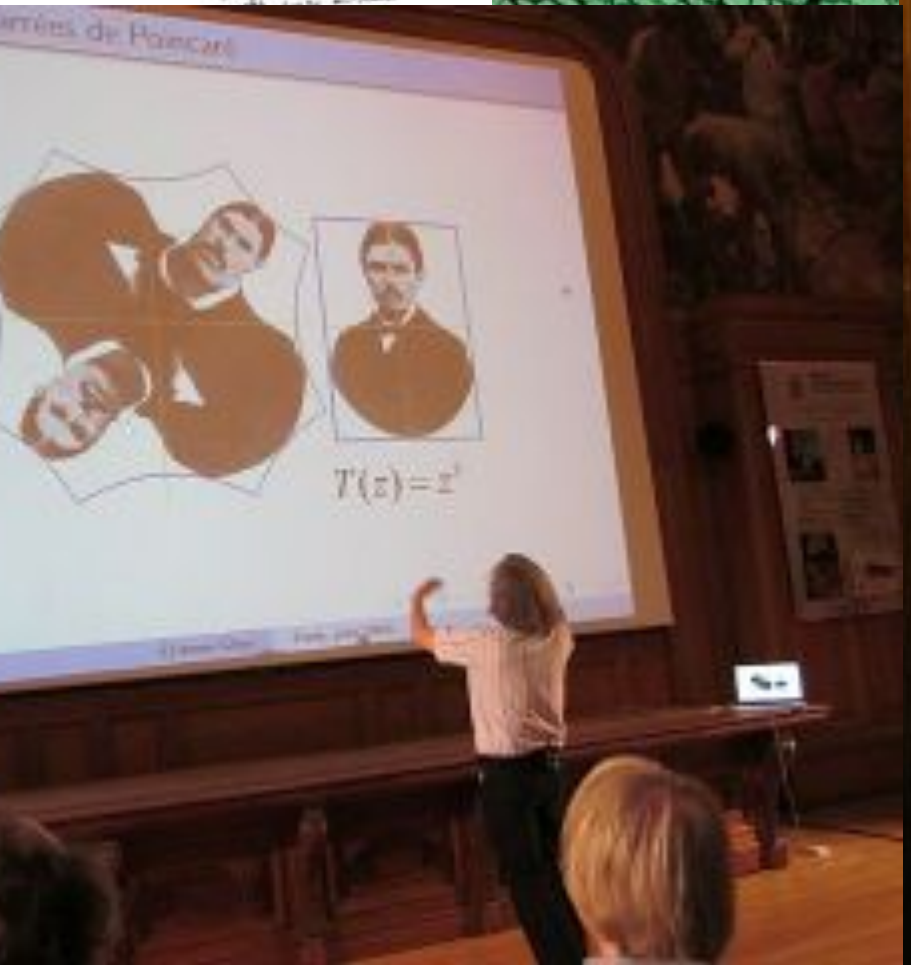
Raymond Poincaré (1860-1934)

INSTITUT HENRI POINCARÉ

Prix Henri Poincaré 2012




AN HENRI POINCARÉ MYSTERY
ALL CRY CHAOS
LEONARD ROSEN


$T(z)=z^2$

INSTITUT
HENRI POINCARE

« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »

(La Science et l'Hypothèse, 1901)

« La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. » *(La Valeur de la Science, 1905)*

« Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison. »

(La Valeur de la Science)

« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. » *(Science et Méthode, 1908)*

« la faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition. Sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées. » *(Science et Méthode)*

L'INTUITION : L'ÉPISODE DU MARCHEPIED

Il est temps de pénétrer plus avant et de voir ce qui se passe dans l'âme même du mathématicien. Pour cela, je crois que ce que j'ai de mieux à faire, c'est de rappeler des souvenirs personnels. (…) Je vous demande pardon, je vais employer quelques expressions techniques ; mais elles ne doivent pas vous effrayer, vous n'avez aucun besoin de les comprendre. Je dirai, par exemple : J'ai trouvé la démonstration de tel théorème dans telles circonstances ; ce théorème aura un nom barbare, que beaucoup d'entre vous ne connaîtront pas, mais cela n'a aucune importance ; ce qui est intéressant pour le psychologue, ce n'est pas le théorème, ce sont les circonstances.

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir contrairement à mon habitude ; je ne pus m'endormir ; les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent pour ainsi dire pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

A ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien de mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes sont identiques à celles de la Géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies sont identiques à celles de la Géométrie non euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y a des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique ; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes et que, par conséquent, il existe des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés ; il y en avait un, cependant, qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont Valérien, où je devais faire mon service militaire ; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

LES ERREURS

Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les Mathématiques ? Si les Mathématiques n'invoquent que les règles de la Logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits, si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ?

LES ERREURS

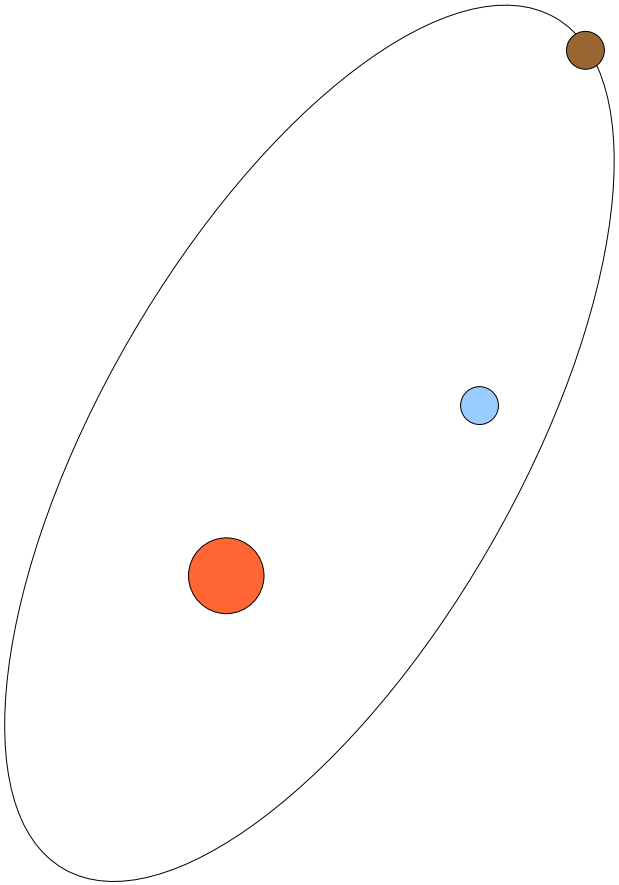
Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les Mathématiques ? Si les Mathématiques n'invoquent que les règles de la Logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits, si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ?

(…) Et il y a plus ; comment l'erreur est-elle possible en Mathématiques ? Une intelligence saine ne doit pas commettre de faute de logique, et cependant il y a des esprits très fins, (…) qui sont incapables de suivre ou de répéter sans erreur les démonstrations des Mathématiques (…) qui ne sont, après tout, qu'une accumulation de petits raisonnements tout à fait analogues à ceux qu'ils font si facilement. Est-il nécessaire d'ajouter que les bons mathématiciens eux-mêmes ne sont pas infaillibles ?

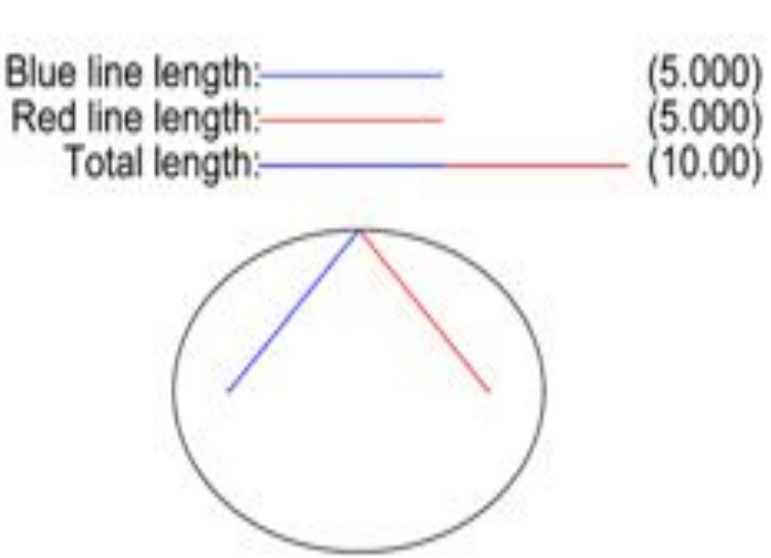
UNE ERREUR DE COMMUNICATION

Non, il n'y a pas d'espace absolu ; ces deux propositions contradictoires : « la Terre tourne » et « la Terre ne tourne pas » ne sont donc pas cinématiquement plus vraies l'une que l'autre. Affirmer l'une, en niant l'autre, au sens cinématique, ce serait admettre l'existence de l'espace absolu.

1887

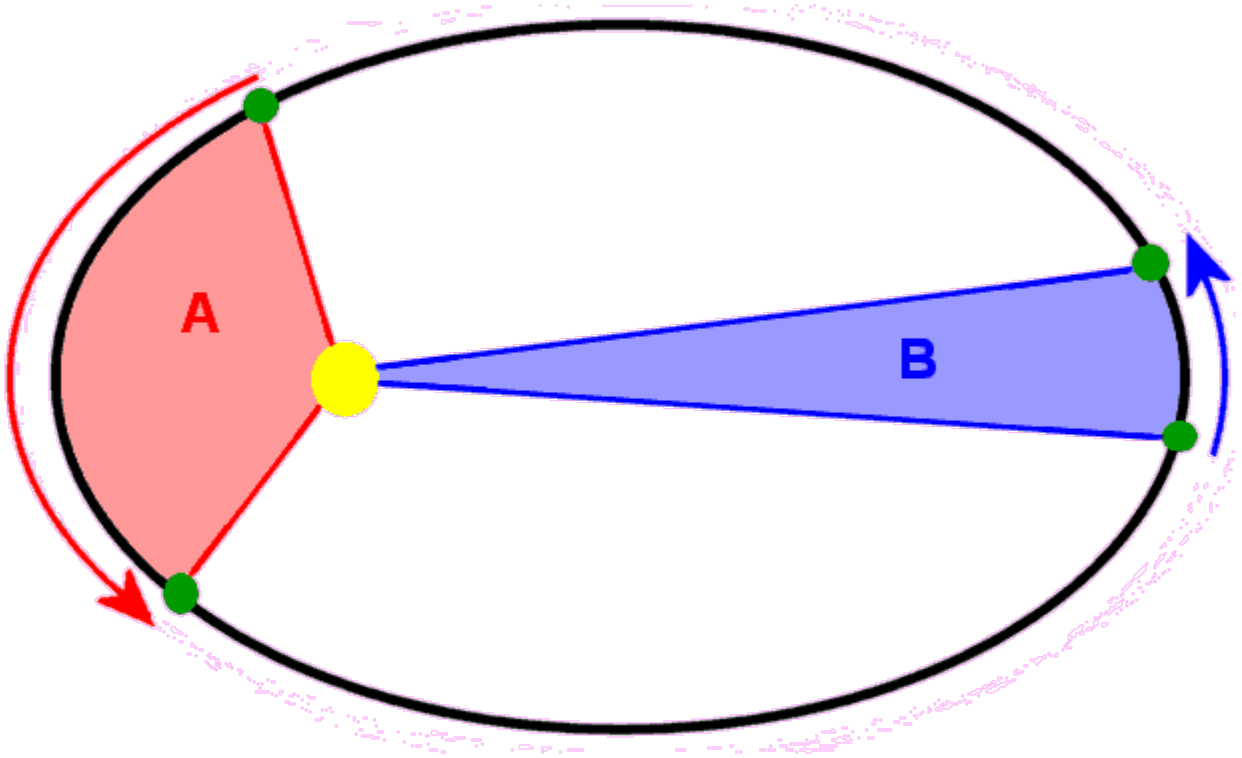


KEPLER



Orbites elliptiques,
le Soleil est un foyer

SECONDE LOI DE KEPLER



Les aires sont balayées uniformément

TROISIÈME LOI DE KEPLER

$$\frac{T^2}{a^3} = const.$$

Relation entre la période et le demi-grand axe

TROISIÈME LOI DE KEPLER

ANNÉES PLANÉTAIRES		demi-axe	
Mercure	0,24	Me	0,4
Vénus	0,61	V	0,7
Terre	1	T	1
Mars	1,9	Ma	1,5
Jupiter	12	J	5,2
Saturne	29	S	9,5
Uranus	84	U	19,6
Neptune	164	N	30
Pluton	248	P	39

$$\frac{T^2}{a^3} = const.$$

Relation entre la période et le demi-grand axe

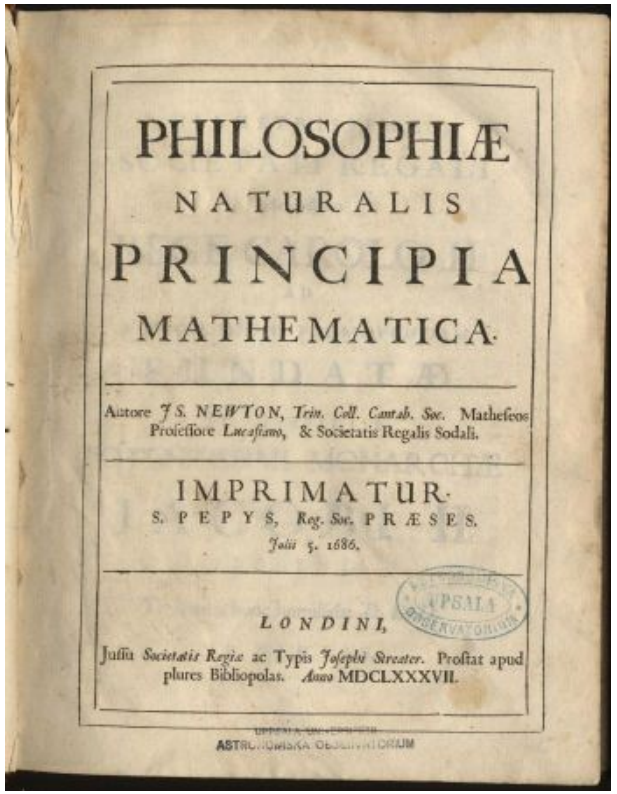
Voltaire :

« Kepler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, mais une âme végétante,
agissante : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En faisant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ennemi est repoussé; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.

Il faut avouer, pour l'humiliation de la philosophie, que c'est de ce raisonnement si peu philosophique, qu'il avait conclu que le soleil devait tourner sur son axe; l'erreur le conduisit par hasard à la vérité.

Kepler ajoute (...) que la masse du soleil, la masse de tout l'éther, & la masse des sphères des étoiles fixes, sont parfaitement égales; & que ce sont les trois symboles de la Très-Sainte Trinité. »

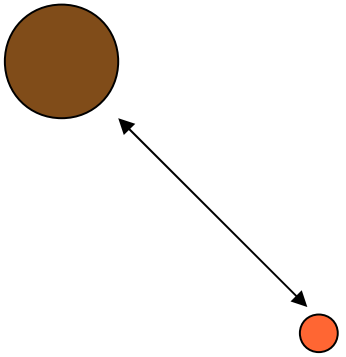
Loi de la gravitation universelle


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

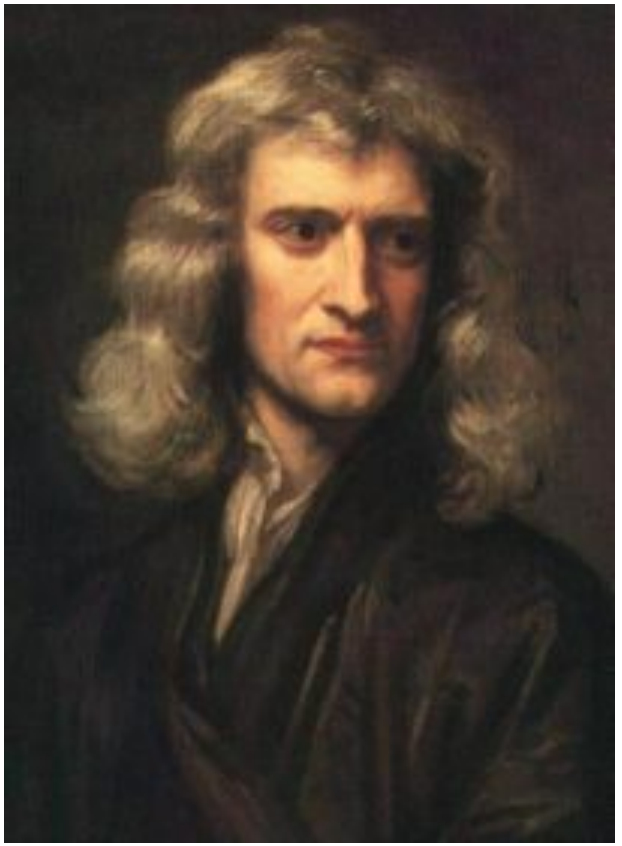
Autore *IS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Justu Societatis Regiæ ac Typis *Josephi Streater.* Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

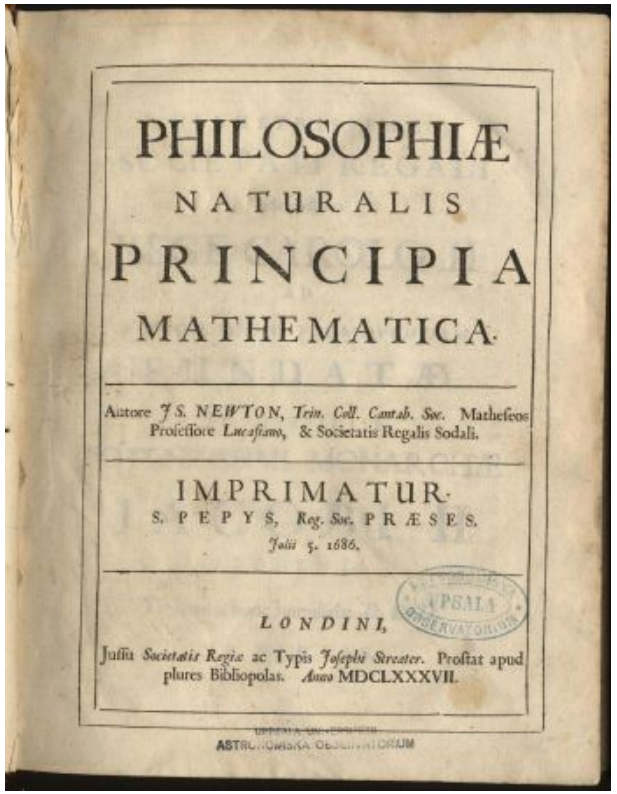


$$F = \frac{G M m}{r^2}$$



$$m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = -\sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} \qquad i = 1, 2 \ldots N$$

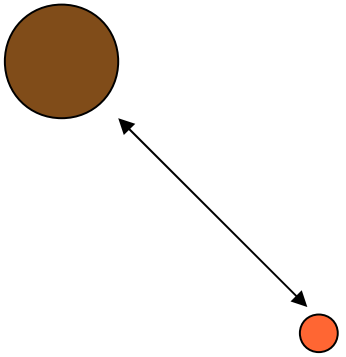
Loi de la gravitation universelle


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

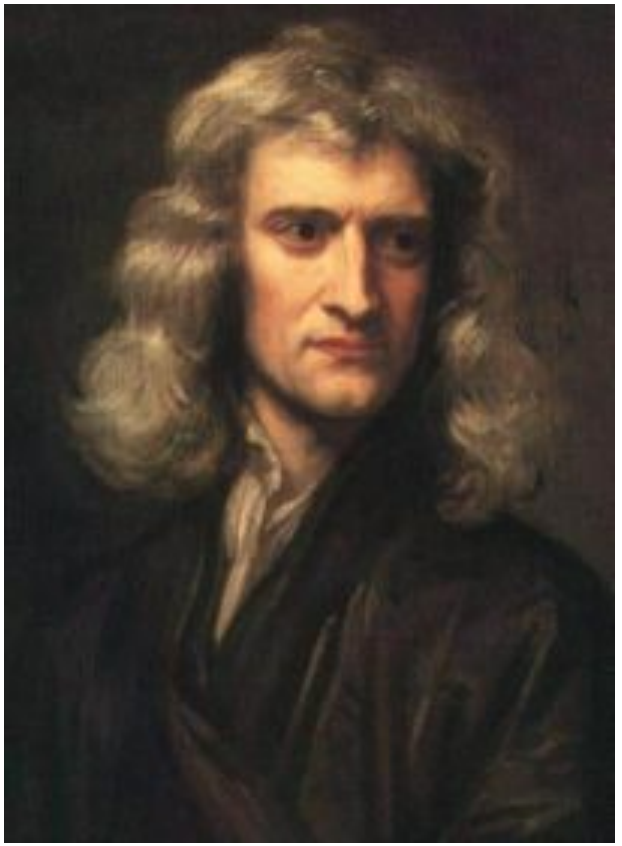
Autore *J.S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Justu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.



$$F = \frac{G\,M\,m}{r^2}$$

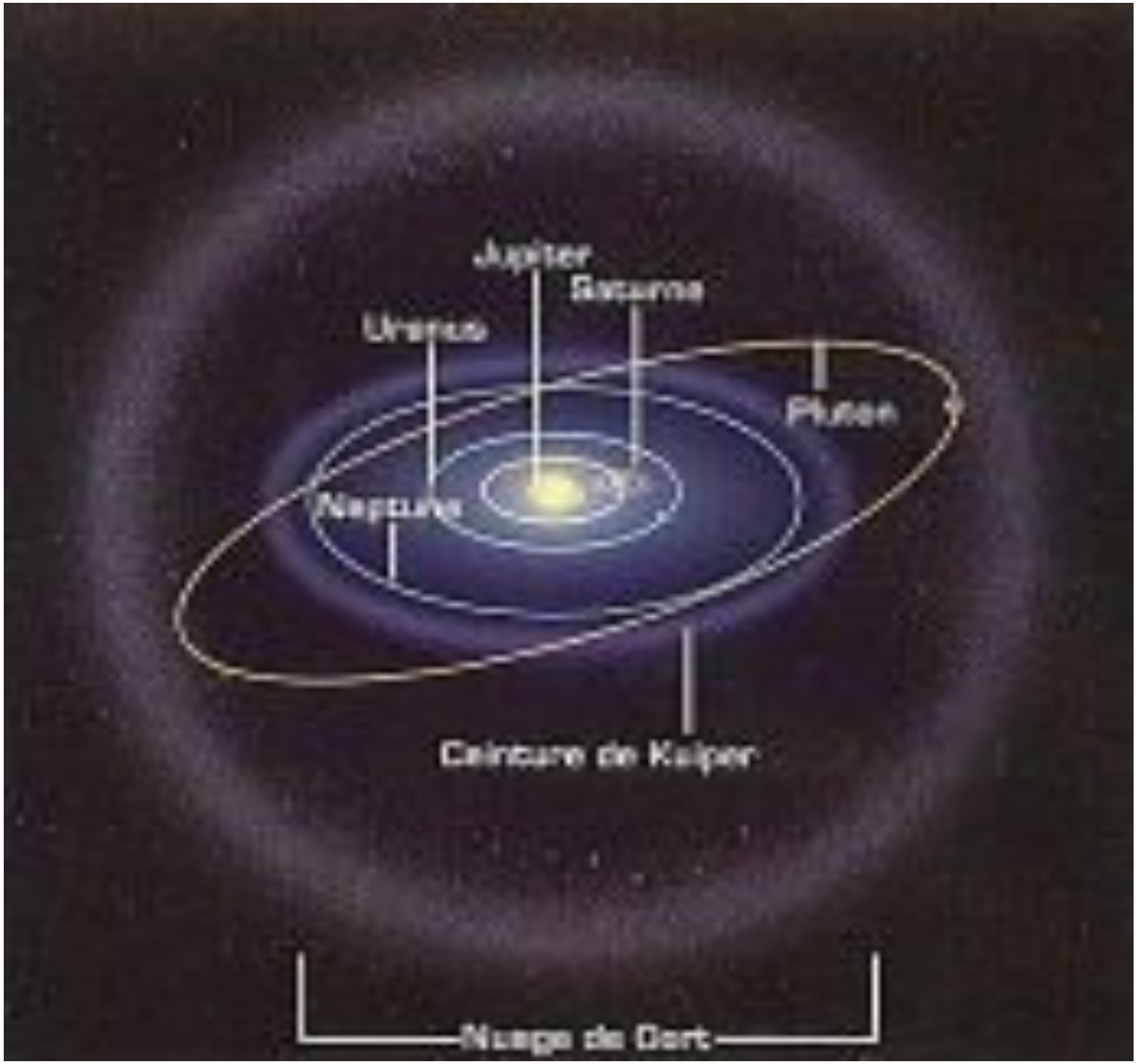


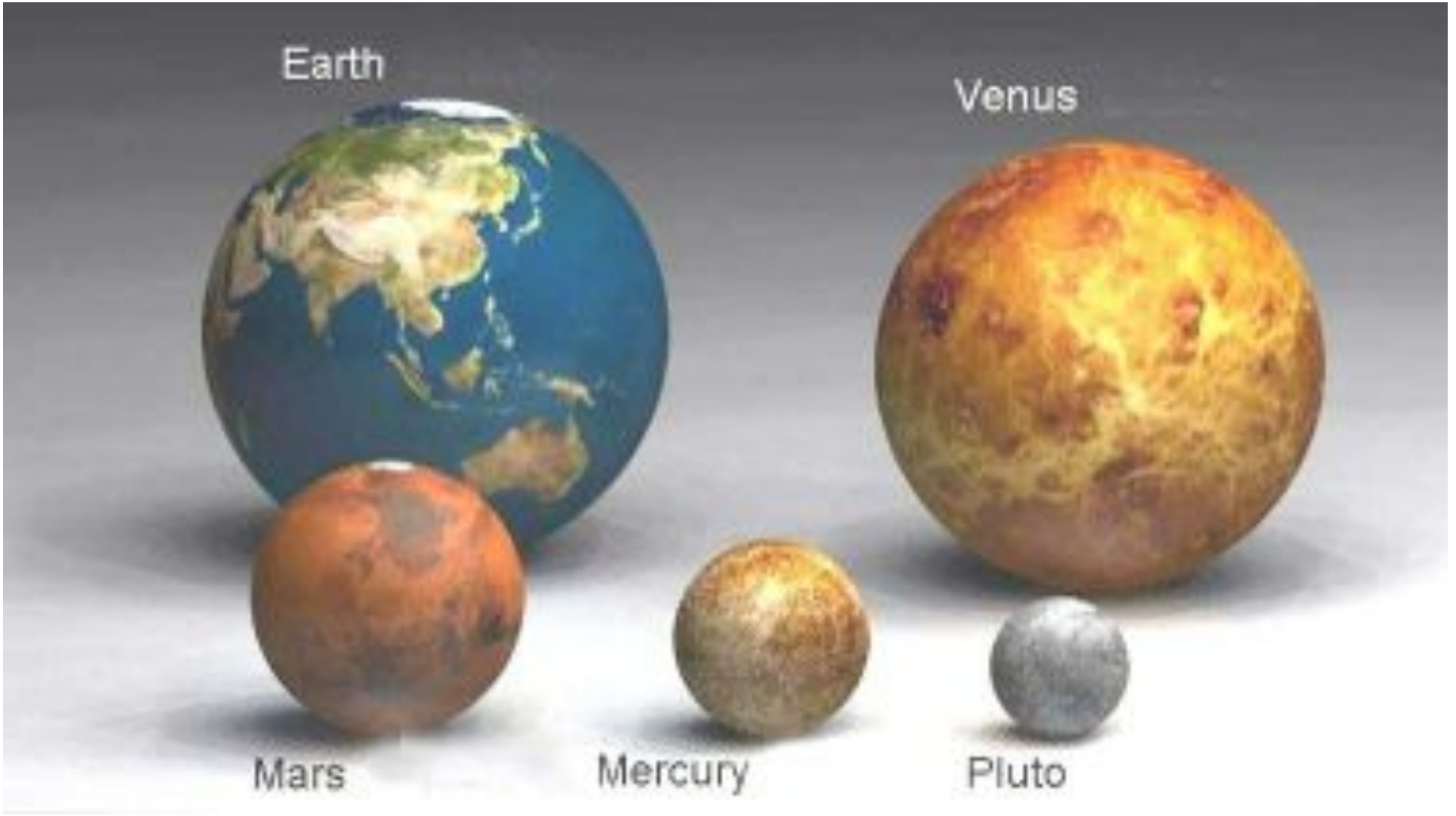
2 corps ⟶ on retrouve Kepler

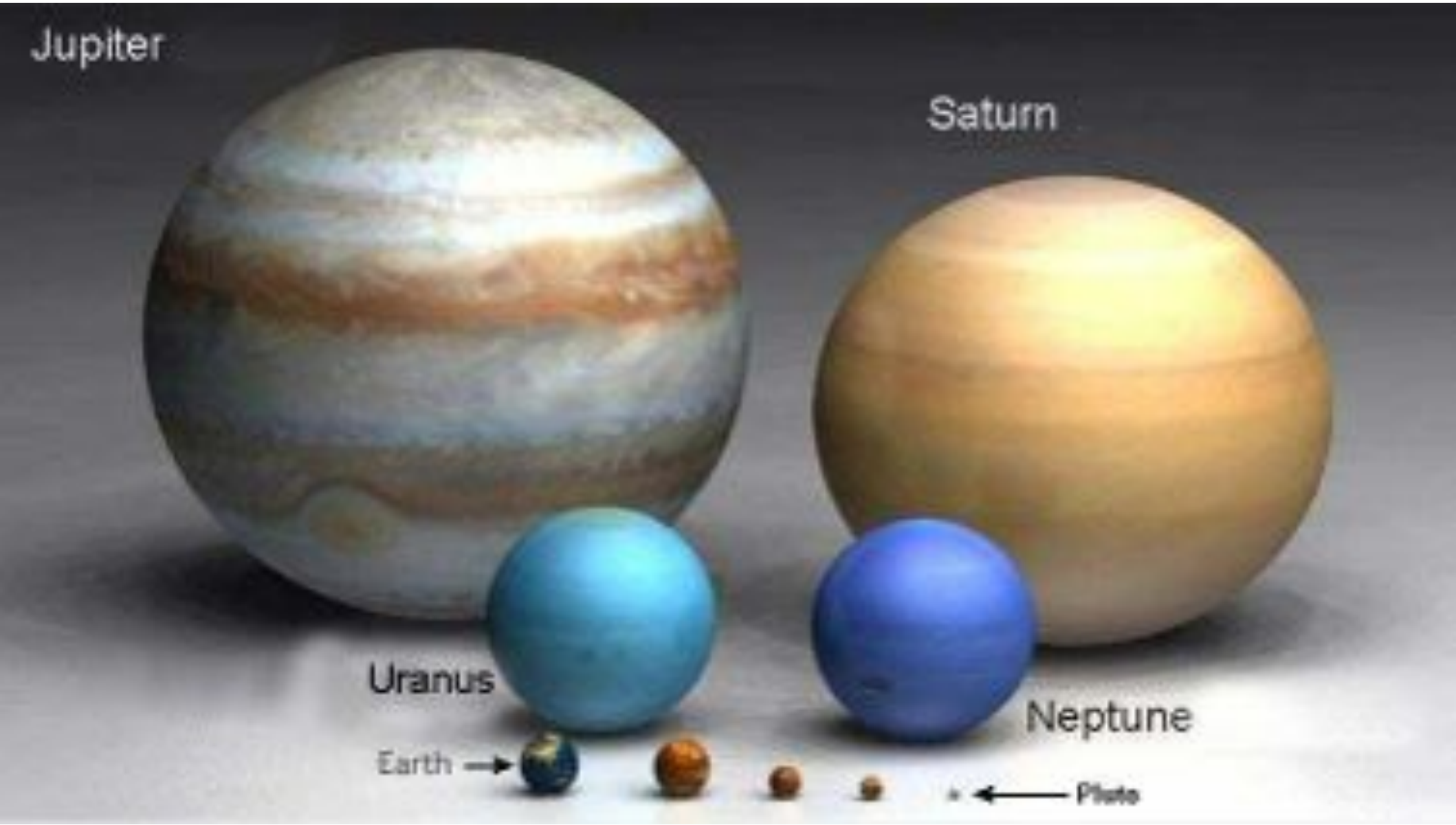
Dès qu'il y a 3 corps ou plus, pas de solution « explicite » !

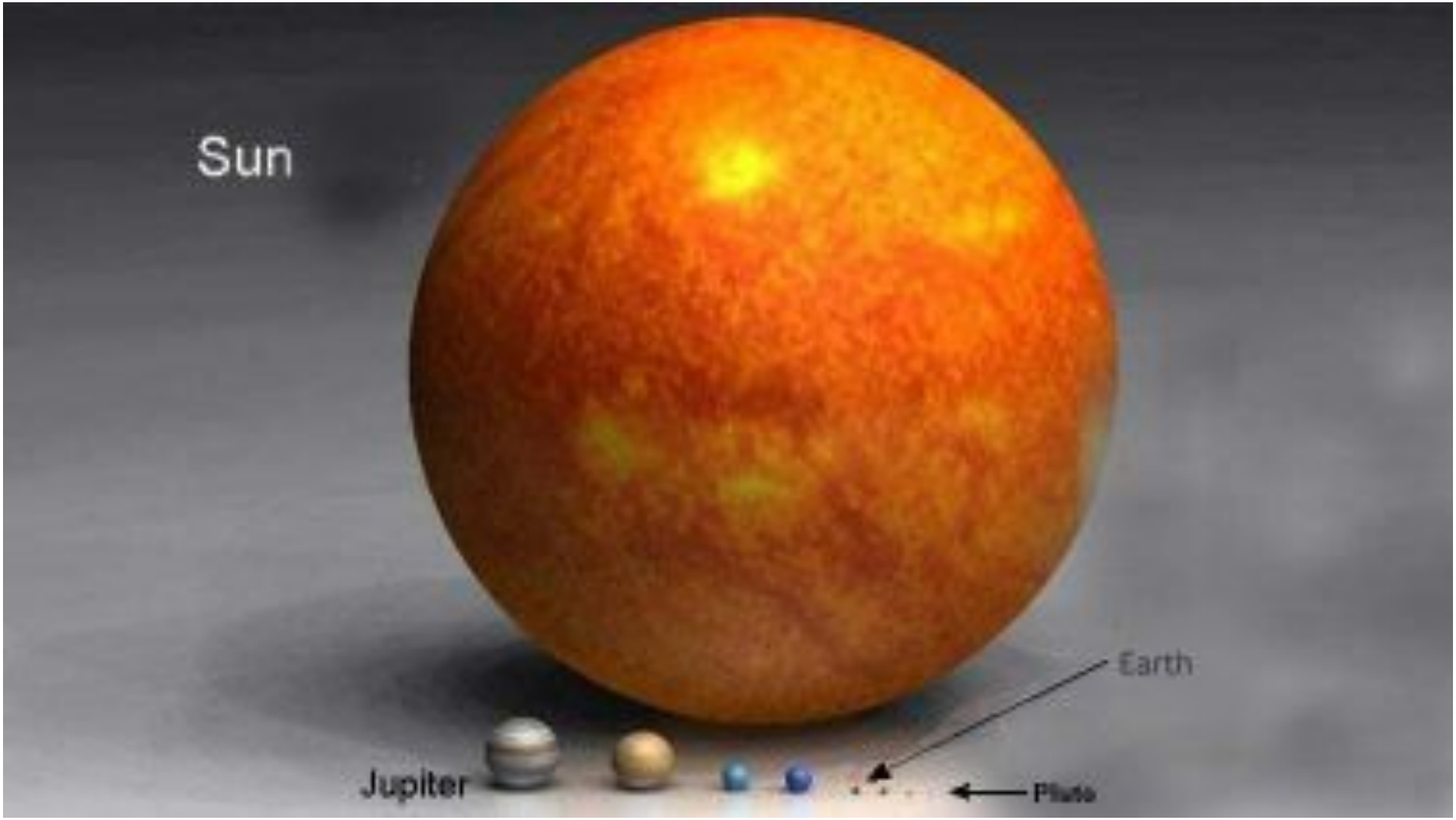
Aucune loi n'interdit les événements catastrophiques...

Stabilité du système solaire ?




Earth
Venus
Mars
Mercury
Pluto


Jupiter
Saturn
Uranus
Neptune
Earth
Pluto


Sun
Earth
Jupiter
Pluto

Qu'en pense Newton ?

« Le sort aveugle ne pourrait jamais faire se mouvoir les Planètes toutes semblablement dans des Orbes concentriques, à quelques erreurs minimes près, qui auraient pu provenir des Actions mutuelles des Planètes l'une sur l'autre, et qui sont destinées à augmenter, jusqu'à ce que ce système ait besoin d'une reformation. »

STABILITÉ ?

LAGRANGE, LAPLACE & GAUSS

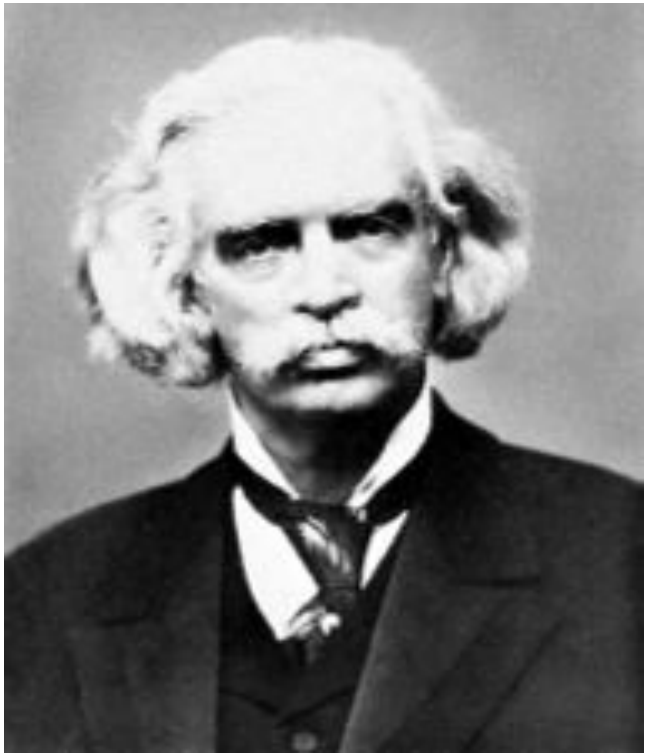
- **Inventent les méthodes perturbatives**

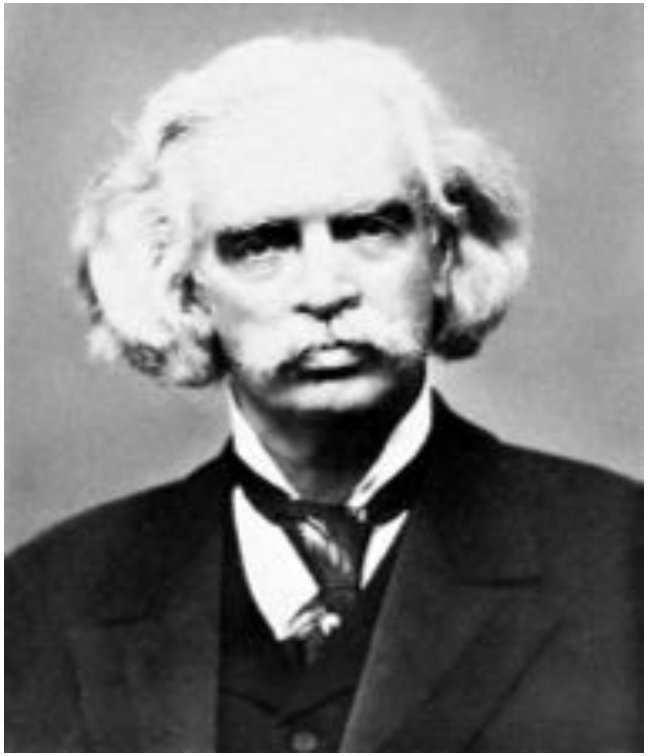
- **Prédisent la stabilité : invariance des grands axes**

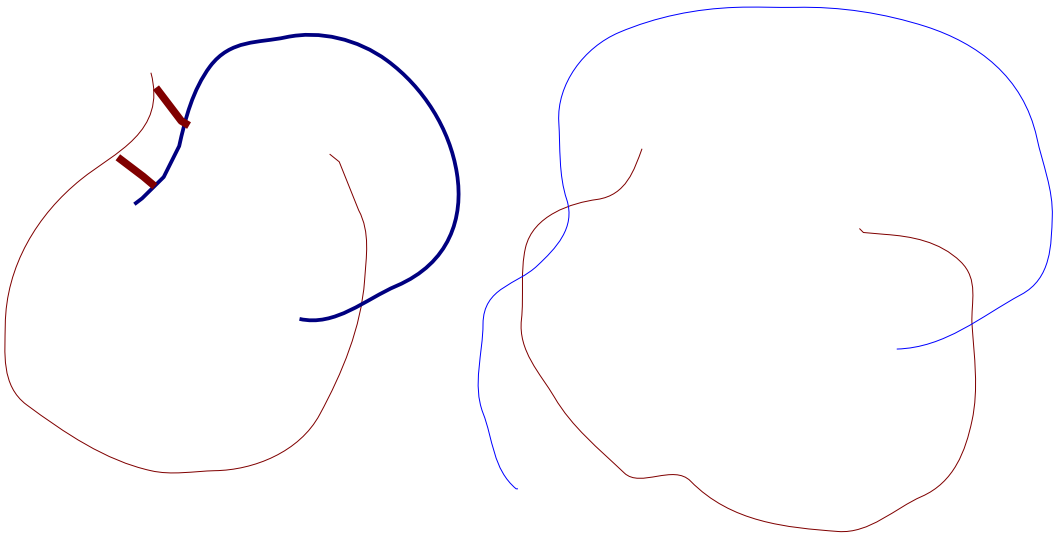
échelle de temps critique est bien plus grande qu'attendu, typiquement $1/\varepsilon^2$

(À l'encontre des observations sur plusieurs siècles)

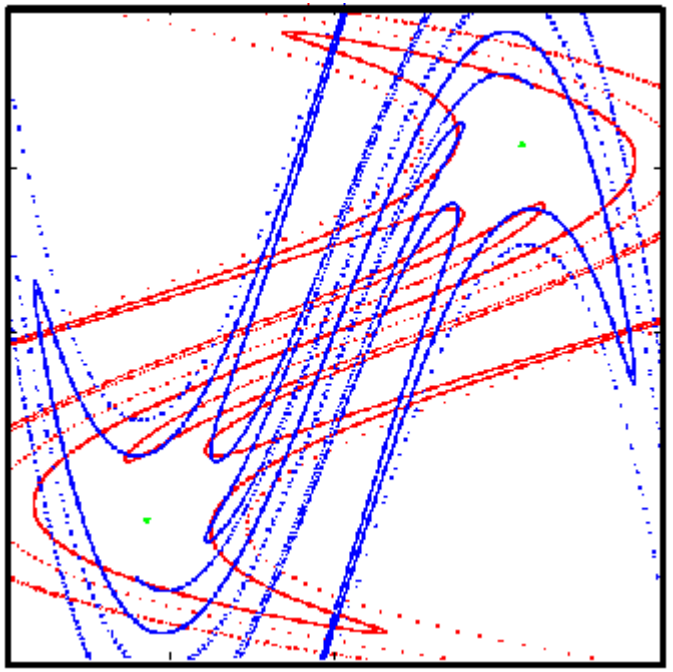
- **Confirment la loi de Newton et théorisent le Déterminisme « laplacien »**







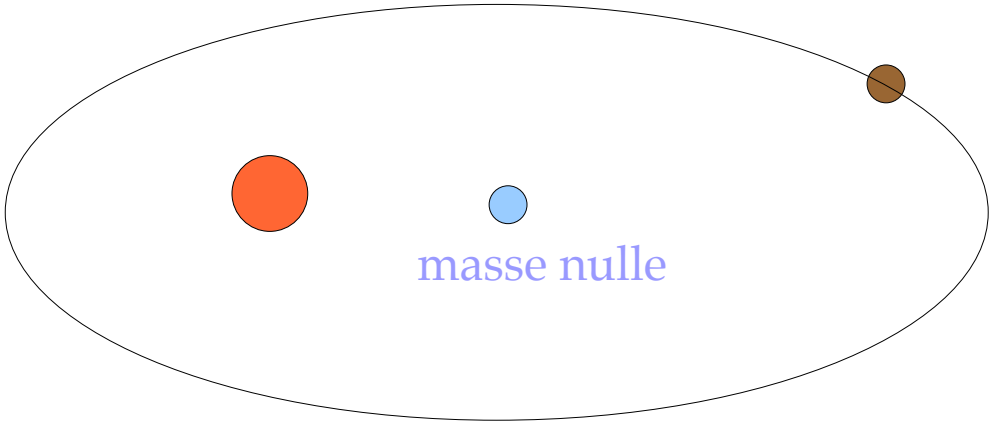
Découverte des intersections homoclines



« Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. »

INSTABILITÉ ?

POINCARÉ
étudie le problème restreint des trois corps



Il met en évidence des trajectoires extrêmement instables, imprédictibles sur de grands temps – c'est la naissance de la théorie du chaos (avec Jacques Hadamard)

INSTABILITÉ ?

POINCARÉ
étudie le problème restreint des trois corps

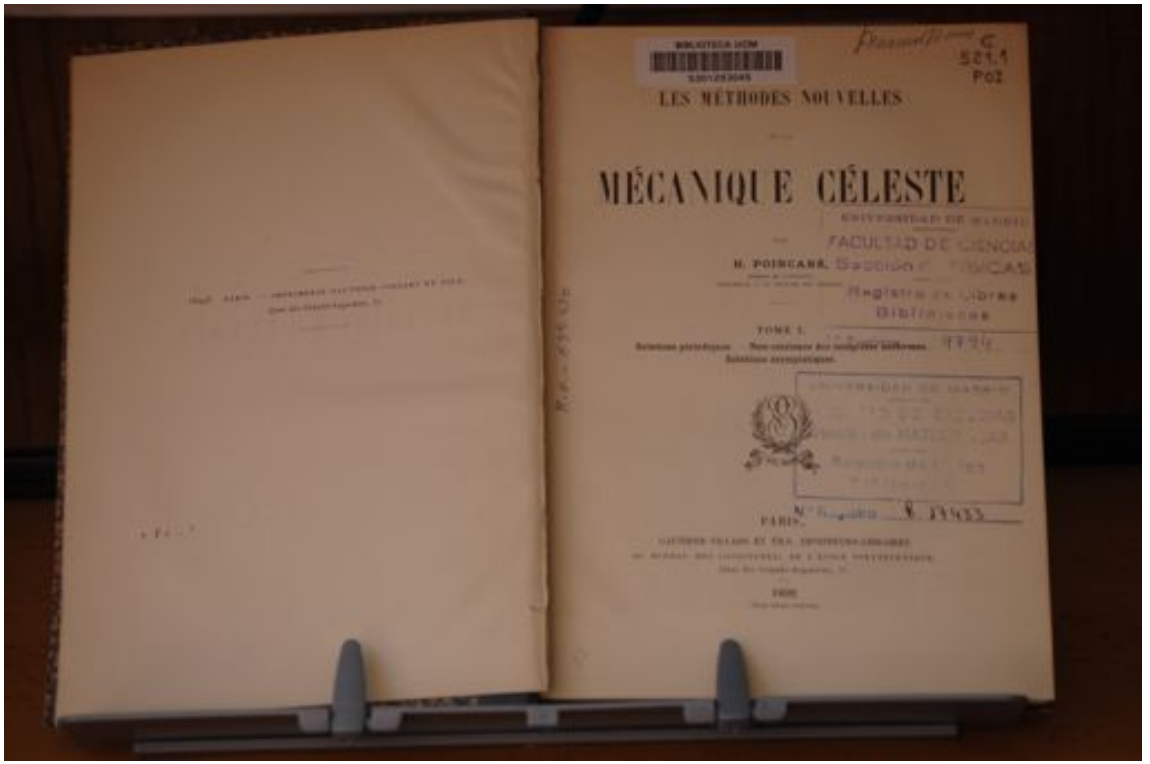
Il met en évidence des trajectoires extrêmement instables, imprédictibles sur de grands temps – c'est la naissance de la théorie du chaos (avec Jacques Hadamard)

« ...Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et, en général, de tous les problèmes de dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme. »

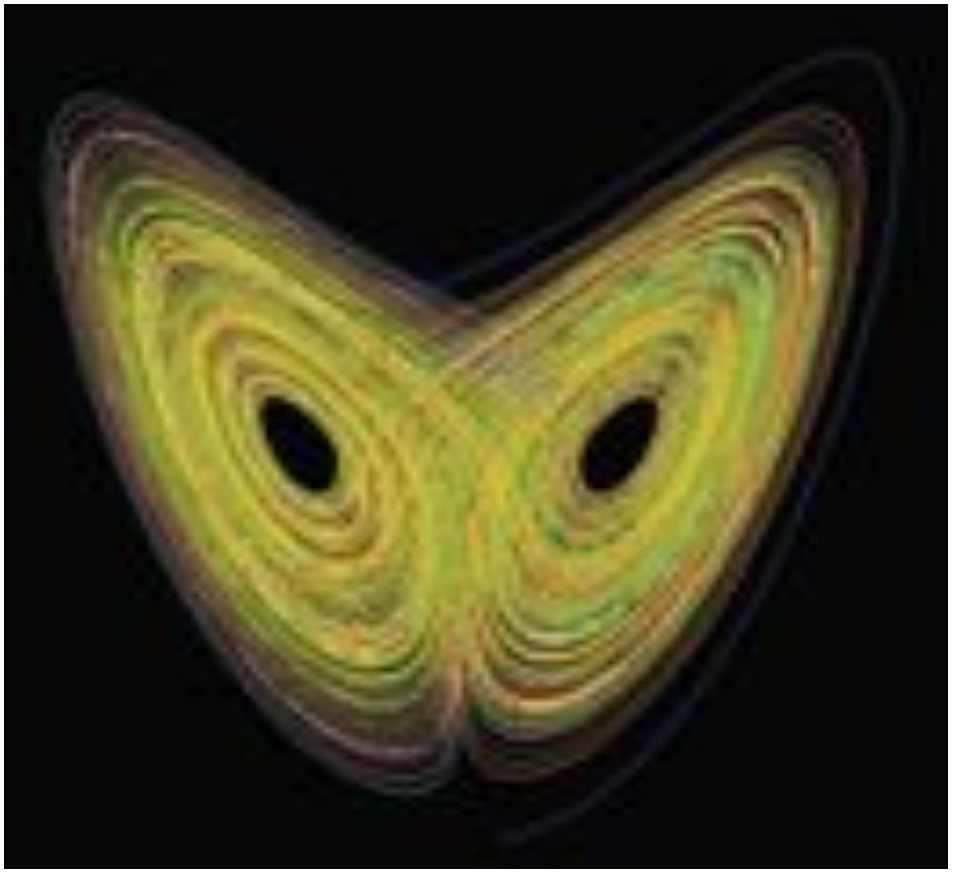
... Le chaos semble la règle !

...Théorie des systèmes dynamiques

avec des outils quantitatifs pour étudier et prédire



La théorie du chaos va continuer son chemin...



$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma\big(y(t) - x(t)\big) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t) \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\, y(t) - \beta\, z(t) \end{cases}$$

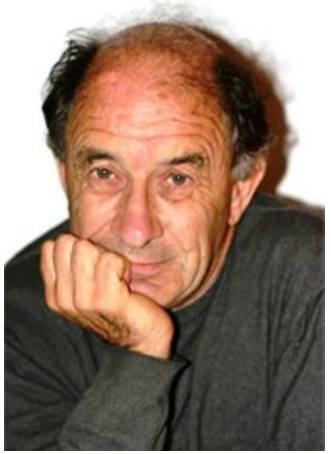
Fausse sortie de la STABILITÉ ?!

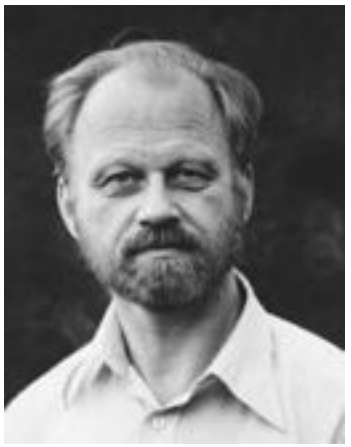
En 1954, KOLMOGOROV énonce un théorème d'influence considérable. C'est le début de la théorie K-A-M (Kolmogorov-Arnold-Moser)

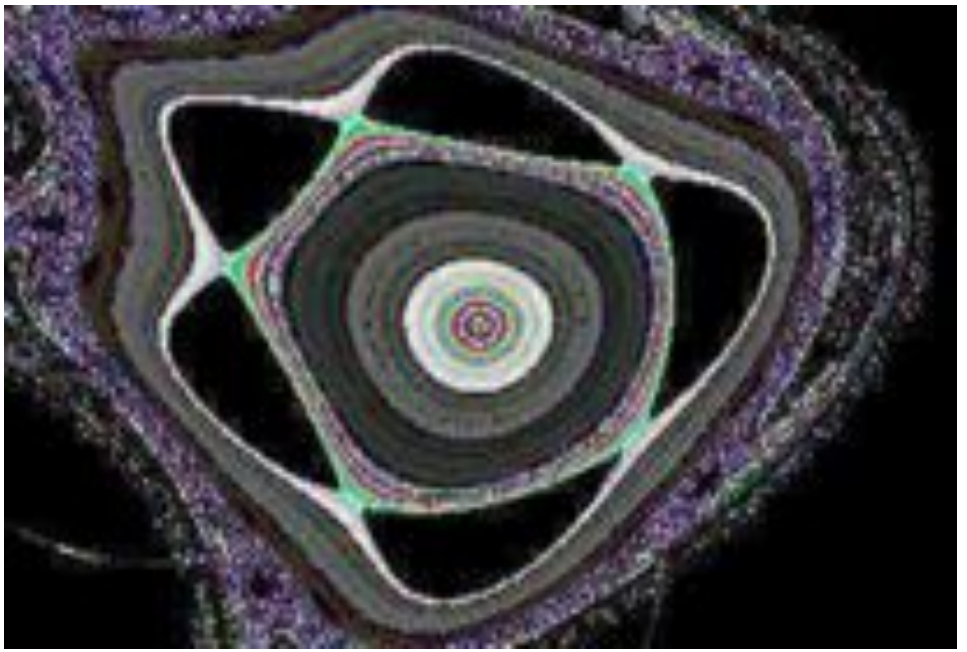
Fausse sortie de la STABILITÉ ?!

En 1954, KOLMOGOROV énonce un théorème d'influence considérable. C'est le début de la théorie K-A-M (Kolmogorov-Arnold-Moser)

Si l'on perturbe un système « complètement integrable » et qu'on and choisit une configuration initiale au hasard, alors avec très forte probabilité on reste sur une trajectoire confinée







Applicabilité du Théorème KAM

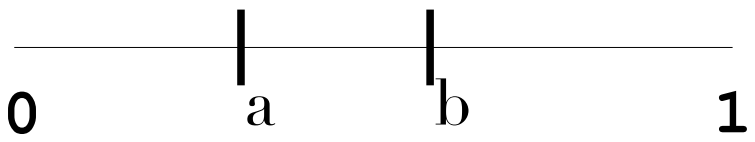
Le Théorème KAM ne s'applique pas au système solaire ...
les planètes sont trop grosses !

Cependant il a changé notre vision du monde et a apporté une nouvelle foi en un système solaire stable ...

Aussi le début d'un champ important, élégant et actif des mathématiques

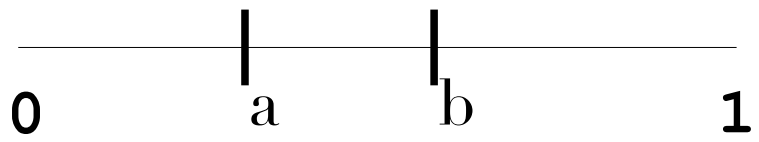
Ce résultat (avec le problème du plongement des géométries non euclidiennes) fonde la théorie de Nash-Moser, méthode perturbative la plus puissante connue en analyse

Digression : tirer un nombre au hasard



Probabilité b-a de tomber dans [a,b]

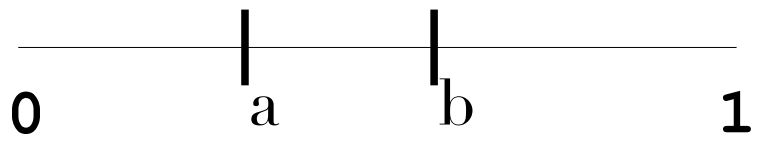
Digression : tirer un nombre au hasard



Probabilité b-a de tomber dans [a,b]

Probabilité de tomber sur un nombre rationnel : 0 ...

Digression : tirer un nombre au hasard

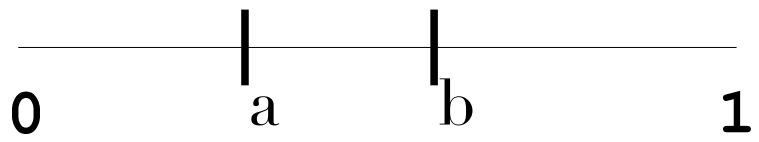


Probabilité b-a de tomber dans [a,b]

Probabilité de tomber sur un nombre rationnel : 0 …
pourtant les nombres rationnels sont denses !

$$\pi = 3{,}14159.... \quad \text{est proche de} \quad \frac{22}{7}$$

Digression : tirer un nombre au hasard

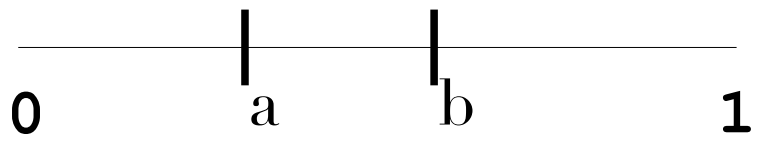


Probabilité b-a de tomber dans [a,b]

Probabilité de tomber sur un nombre rationnel : 0 …
pourtant les nombres rationnels sont denses !

$\pi = 3{,}14159....$ est proche de $\frac{314159}{100000}$

Digression : tirer un nombre au hasard



Probabilité b-a de tomber dans [a,b]

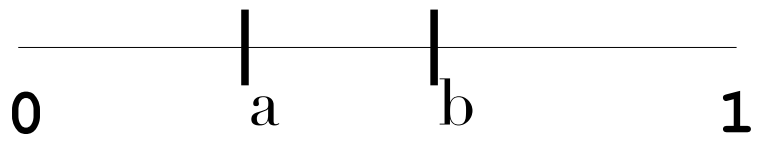
Probabilité de tomber sur un nombre rationnel : 0 …
pourtant les nombres rationnels sont denses !

$\pi = 3{,}14159....$ est proche de $\frac{314159}{100000}$

Certains nombres réels sont difficiles à approcher par des nombres rationnels : on dit que x est diophantien s'il existe C, r tq pour tous entiers p, q

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^r}$$

Digression : tirer un nombre au hasard



Probabilité b-a de tomber dans [a,b]

Probabilité de tomber sur un nombre rationnel : 0 …
pourtant les nombres rationnels sont denses !

$\pi = 3{,}14159....$ est proche de $\frac{314159}{100000}$

Certains nombres réels sont difficiles à approcher par des nombres rationnels : on dit que x est diophantien s'il existe C, r tq pour tous entiers p, q

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^r}$$

Les nombres diophantiens forment encore un ensemble de proba 1...
Ce sont eux qui sont détectés par KAM ! Par exemple le nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ = le nombre qui est le « moins bien » approché par des rationnels, le plus « stable »

Bébé problème

u une fonction « gentille », 2 π périodique, de moyenne (intégrale) $= 0$.
Que dire de $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$?

u
(

Bébé problème

u une fonction « gentille », 2 π périodique, de moyenne (intégrale) = 0.
Que dire de $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$?

$$u(x) = \sum_n u_n e^{inx} \qquad |u_n| \leq \frac{C_s}{n^s} \qquad \text{pour tout } s$$

Bébé problème

u une fonction « gentille », 2 π périodique, de moyenne (intégrale) = 0.
Que dire de $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$?

$$u(x) = \sum_n u_n e^{inx} \qquad |u_n| \leq \frac{C_s}{n^s} \qquad \text{pour tout } s$$

Chercher v tel que $u(x) = v(x+\alpha) - v(x)$ (pour tout x)

Bébé problème

u une fonction « gentille », 2 π périodique, de moyenne (intégrale) = 0.
Que dire de $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$?

$$u(x) = \sum_n u_n e^{inx} \qquad |u_n| \le \frac{C_s}{n^s} \qquad \text{pour tout } s$$

Chercher v tel que $u(x) = v(x+\alpha) - v(x)$ (pour tout x)

$$v(x) = \sum_n v_n e^{inx} \qquad v_n = \frac{u_n}{e^{in\alpha} - 1}$$

Si α/π est diophantien, alors $|v_n| \le const. |u_n| n^r$

… Donc la série définissant v converge

Bébé problème

u une fonction « gentille », 2 π périodique, de moyenne (intégrale) = 0.
Que dire de $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$?

$$u(x) = \sum_n u_n e^{inx} \qquad |u_n| \le \frac{C_s}{n^s} \qquad \text{pour tout } s$$

Chercher v tel que $u(x) = v(x+\alpha) - v(x)$ (pour tout x)

$$v(x) = \sum_n v_n e^{inx} \qquad v_n = \frac{u_n}{e^{in\alpha} - 1}$$

Si α/π est diophantien, alors $|v_n| \le const. |u_n| n^r$

… Donc la série définissant v converge

et $u(\alpha) + \ldots + u(N\alpha) = v((N+1)\alpha) - v(\alpha)$ reste borné pour tout N

ÉPILOGUE ?

Années 1980 : Laskar, Tremaine et d'autres se lancent dans la course à la simulation numérique sur des (dizaines de) millions d'années; d'abord pour des astéroïdes puis pour le système complet

Le choix des méthodes numériques est crucial

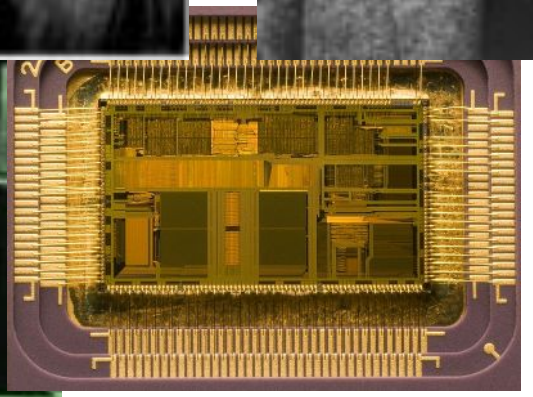
Jacques Laskar écrit un système perturbatif ``simplifié'' de 150 000 termes, polynôme de degré 5 en 16 variables (!) décrivant l'évolution des orbites « keplériennes »...

… Système peu prédictible au-delà de 10 MA, imprédictible au-delà de 60 MA !

$$d(t) = d_0 10^{T/10}$$

Statistiques ...

Pilier technologique : les ordinateurs …



Pilier conceptuel : le chaos et le hasard

C'est grâce au hasard, c'est-à-dire grâce à notre ignorance que nous pouvons conclure ; (…)

Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.

H. Poincaré, Science et Méthode

Pilier conceptuel : le chaos et le hasard

C'est grâce au hasard, c'est-à-dire grâce à notre ignorance que nous pouvons conclure ; (…)

Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste.

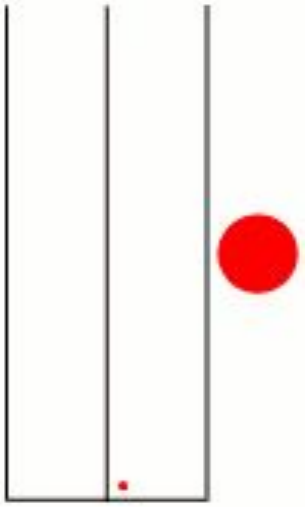
H. Poincaré, Science et Méthode

« J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. » *E. Lorenz*

Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

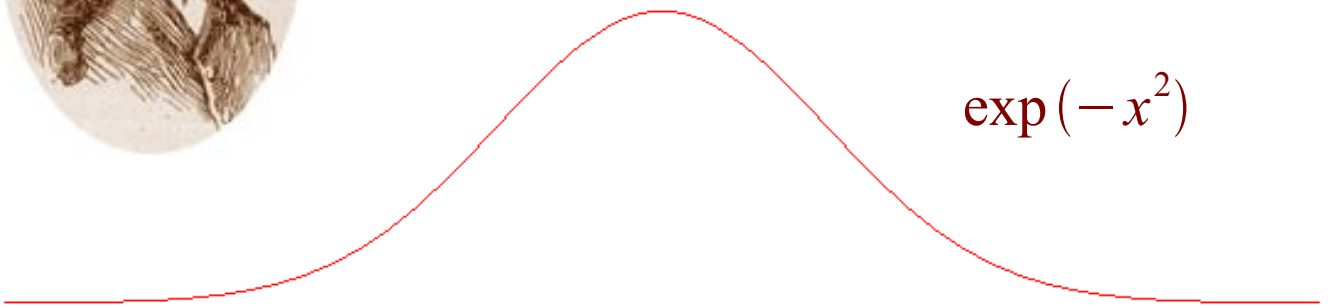
Loi des grands nombres



Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne



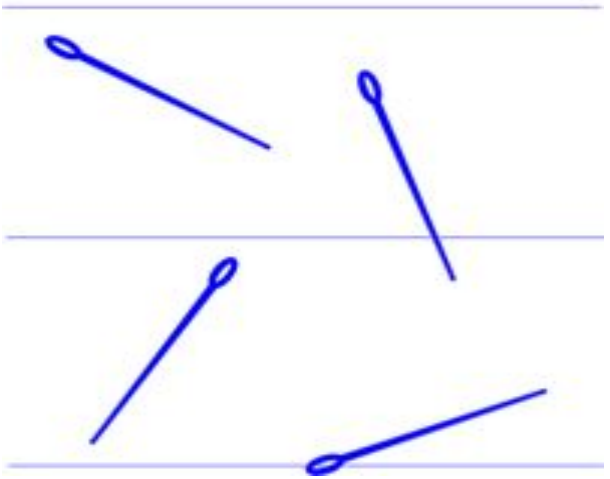
Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

$$p = \frac{2}{\pi}$$



Le hasard lentement apprivoisé

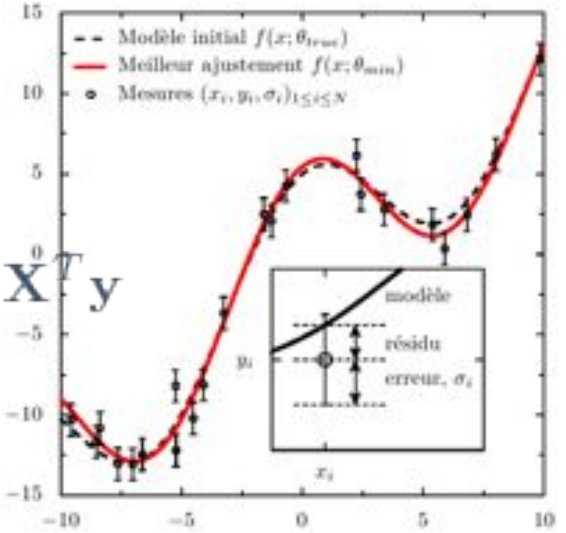
Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$



Le hasard lentement apprivoisé

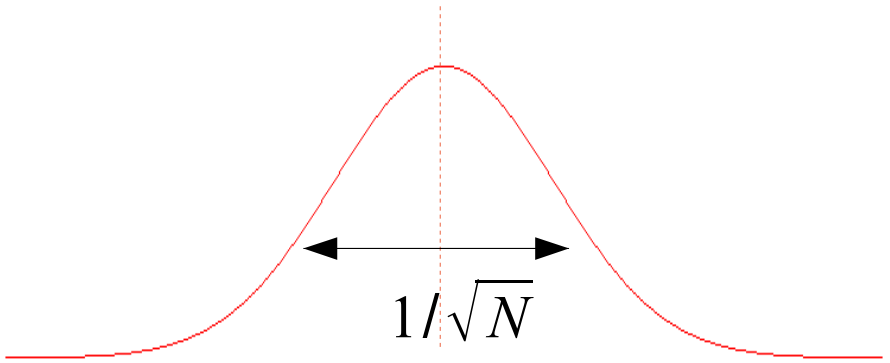
Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

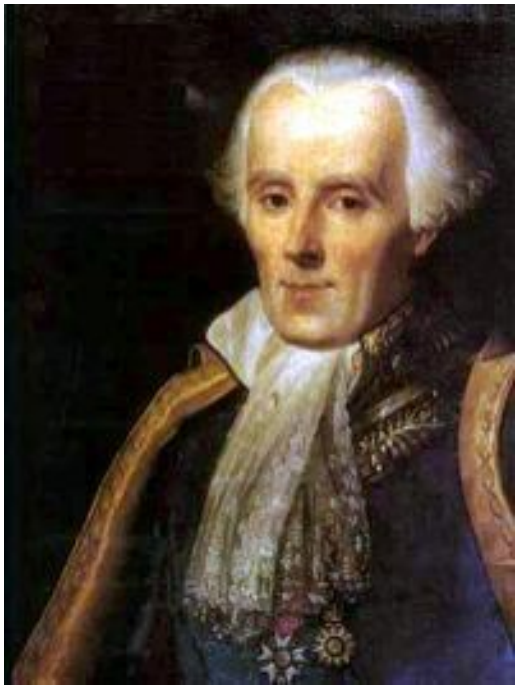
Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs



La moyenne statistique d'un grand nombre de tirages aléatoires présente des fluctuations « gaussiennes »



Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des causes accidentelles »

Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des causes accidentelles »

Joseph **Bertrand** (1888) : « courbe de Gauss »

Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

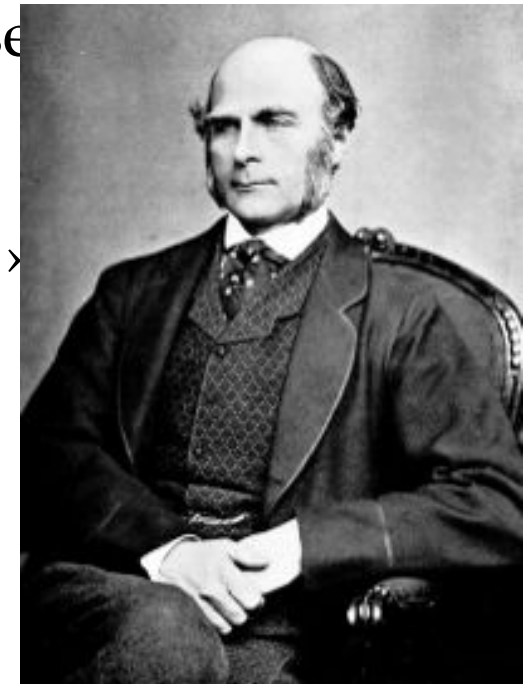
Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des cause

Joseph **Bertrand** (1888) : « courbe de Gauss »

Francis **Galton** (1889) : « loi suprême de la déraison »



I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "Law of Frequency of Error." The law would have been personified by the Greeks and deified, if they had known of it. It reigns with serenity and in complete self-effacement,amidst the wildest confusion. The huger the mob, and the greater the apparent anarchy, the more perfect is its sway. It is the supreme law of Unreason. Whenever a large sample of chaotic elements are taken in hand and marshaled in the order of their magnitude, an unsuspected and most beautiful form of regularity proves to have been latent all along.

Le hasard lentement apprivoisé

Jacques **Bernoulli** (~ 1700) : pose le problème des statistiques

Abraham **de Moivre** (~ 1730) : la loi gaussienne

Georges-Louis Leclerc de **Buffon** (1733, 1777) : l'aiguille !

Karl Friedrich **Gauss** (~ 1809) : moindres carrés gaussiens

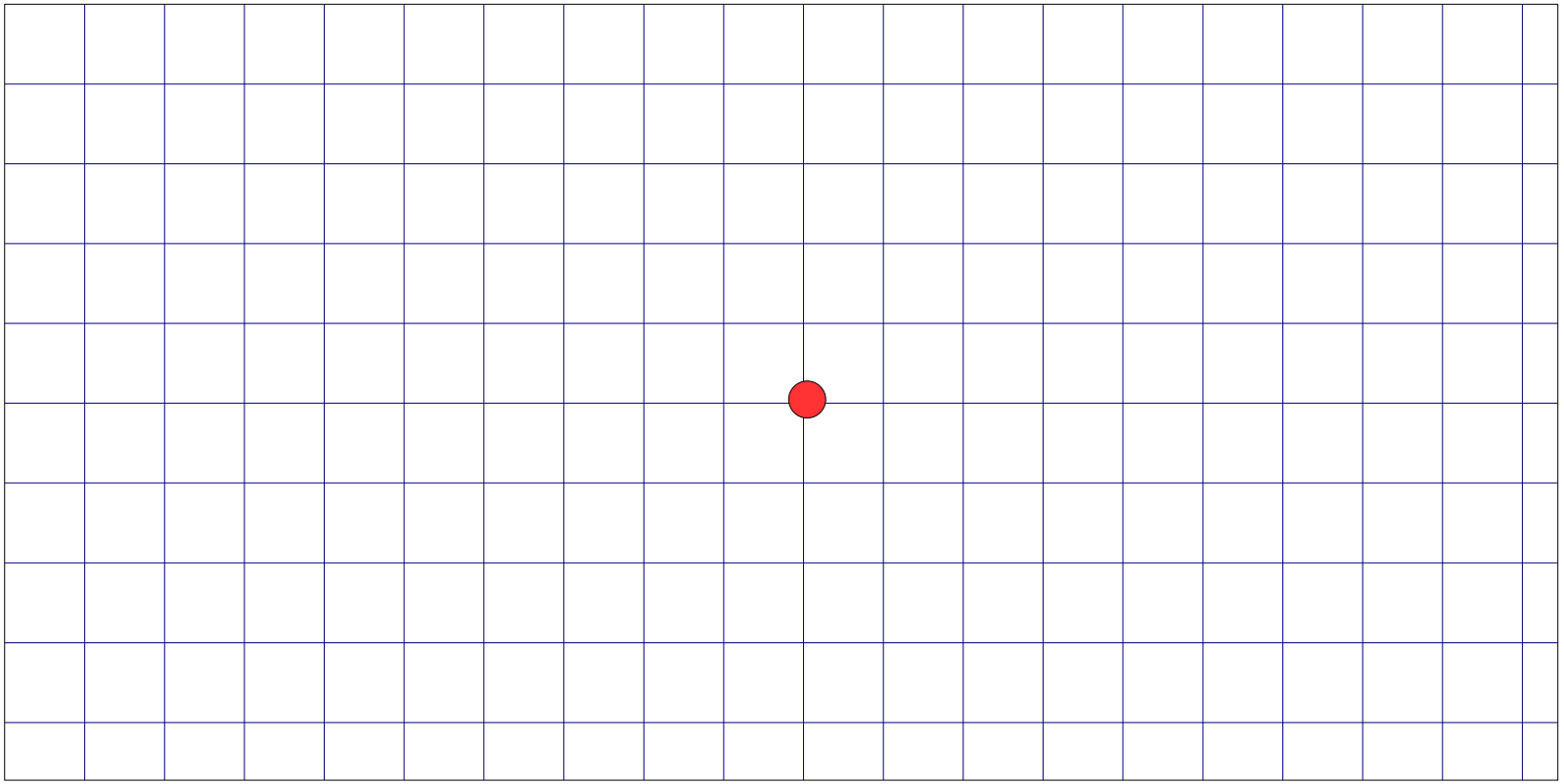
Pierre-Simon de **Laplace** (1810) : loi des erreurs

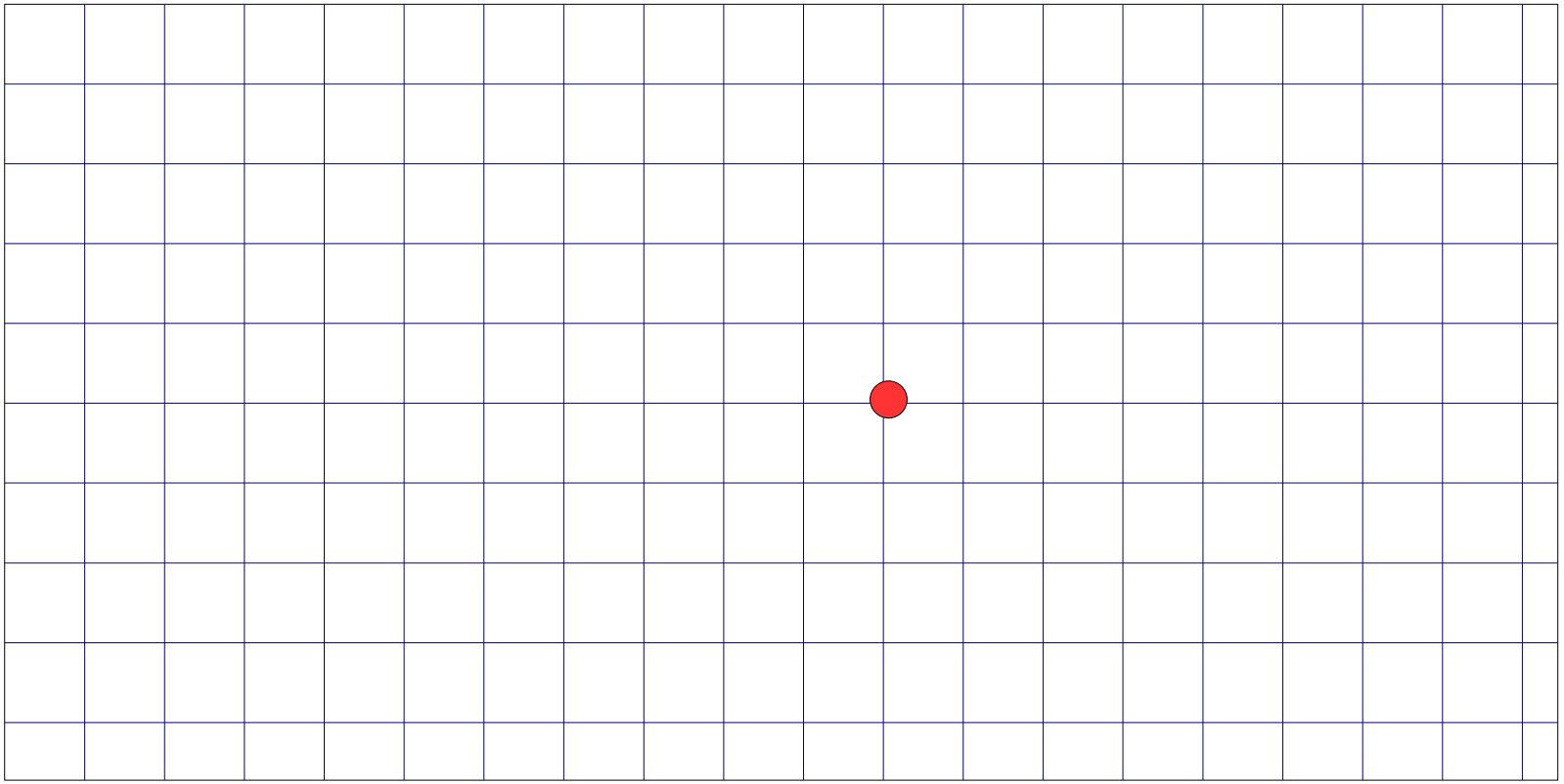
Adolphe **Quetelet** (1846) : popularise la «loi des causes accidentelles »

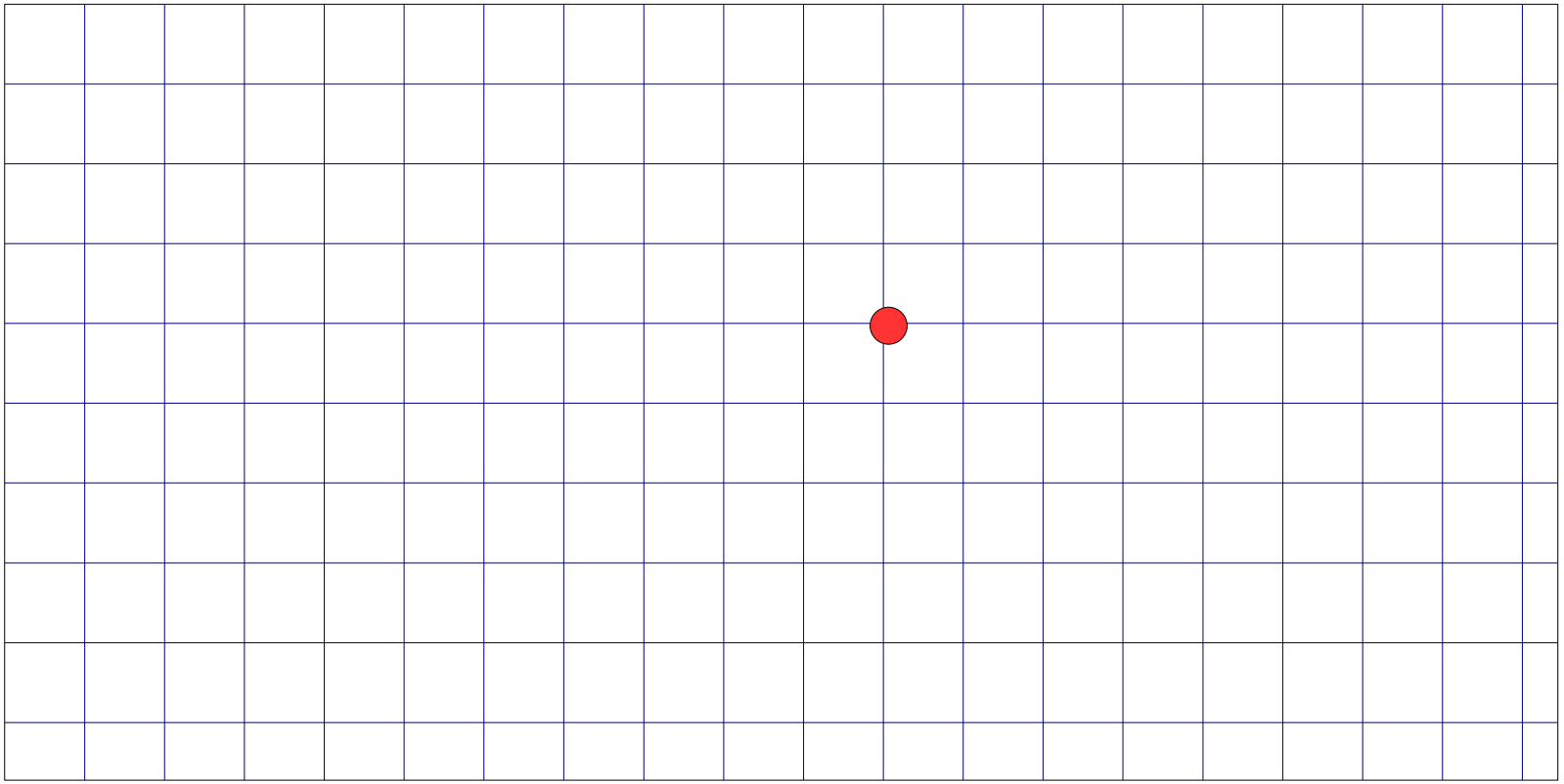
Joseph **Bertrand** (1888) : « courbe de Gauss »

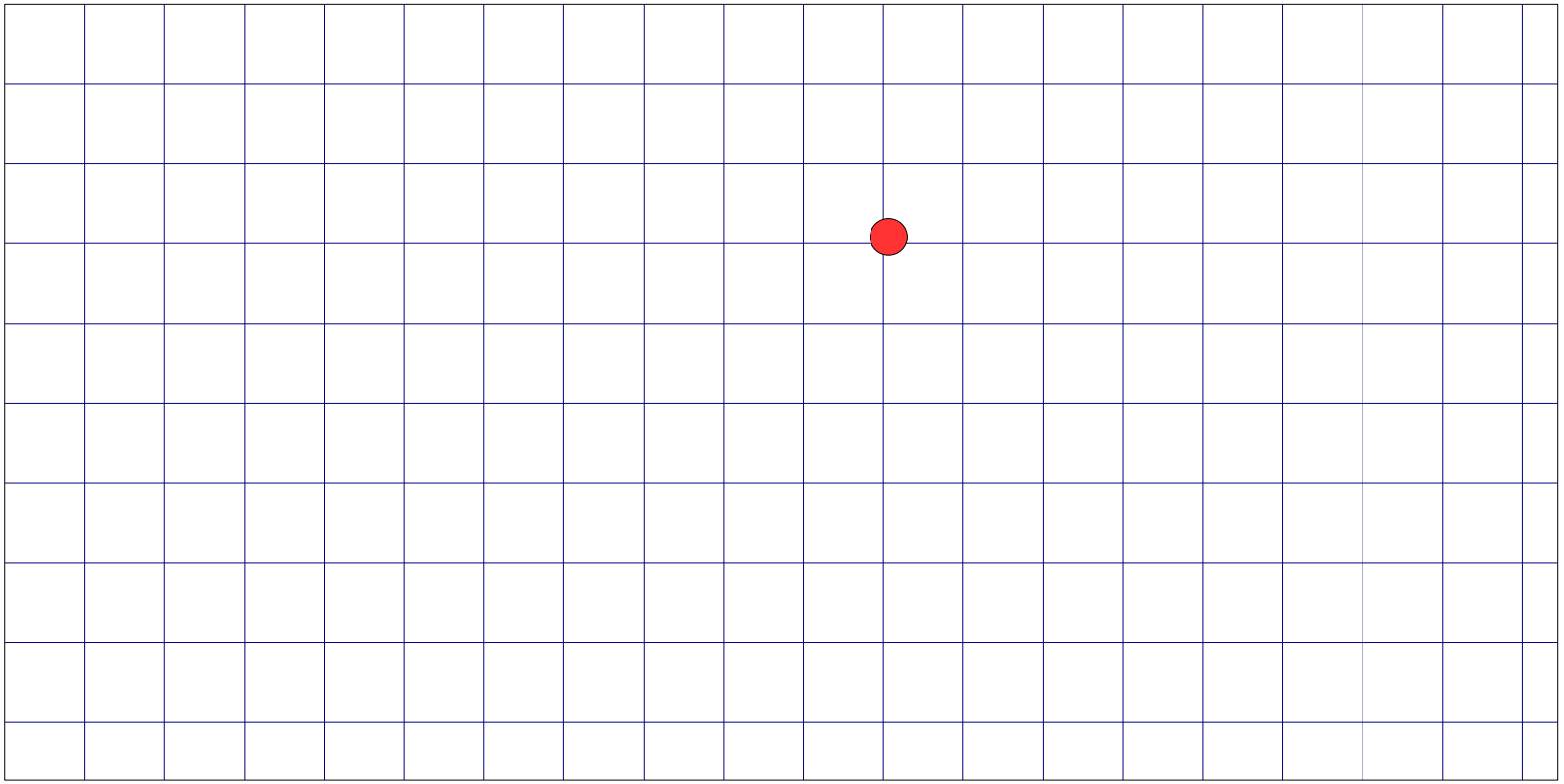
Francis **Galton** (1889) : « loi suprême de la déraison »

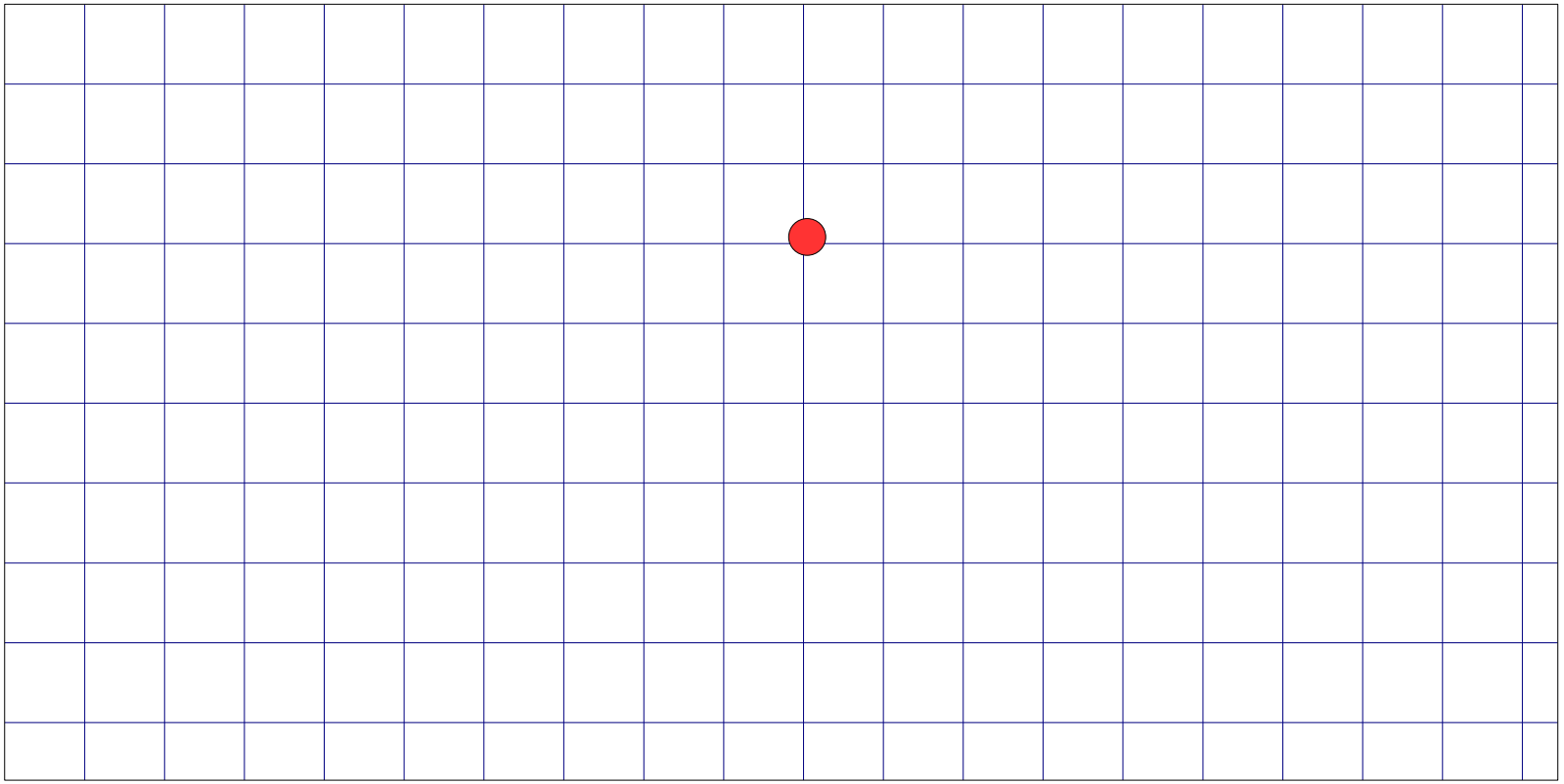
George **Pólya** (1921) : marches aléatoires

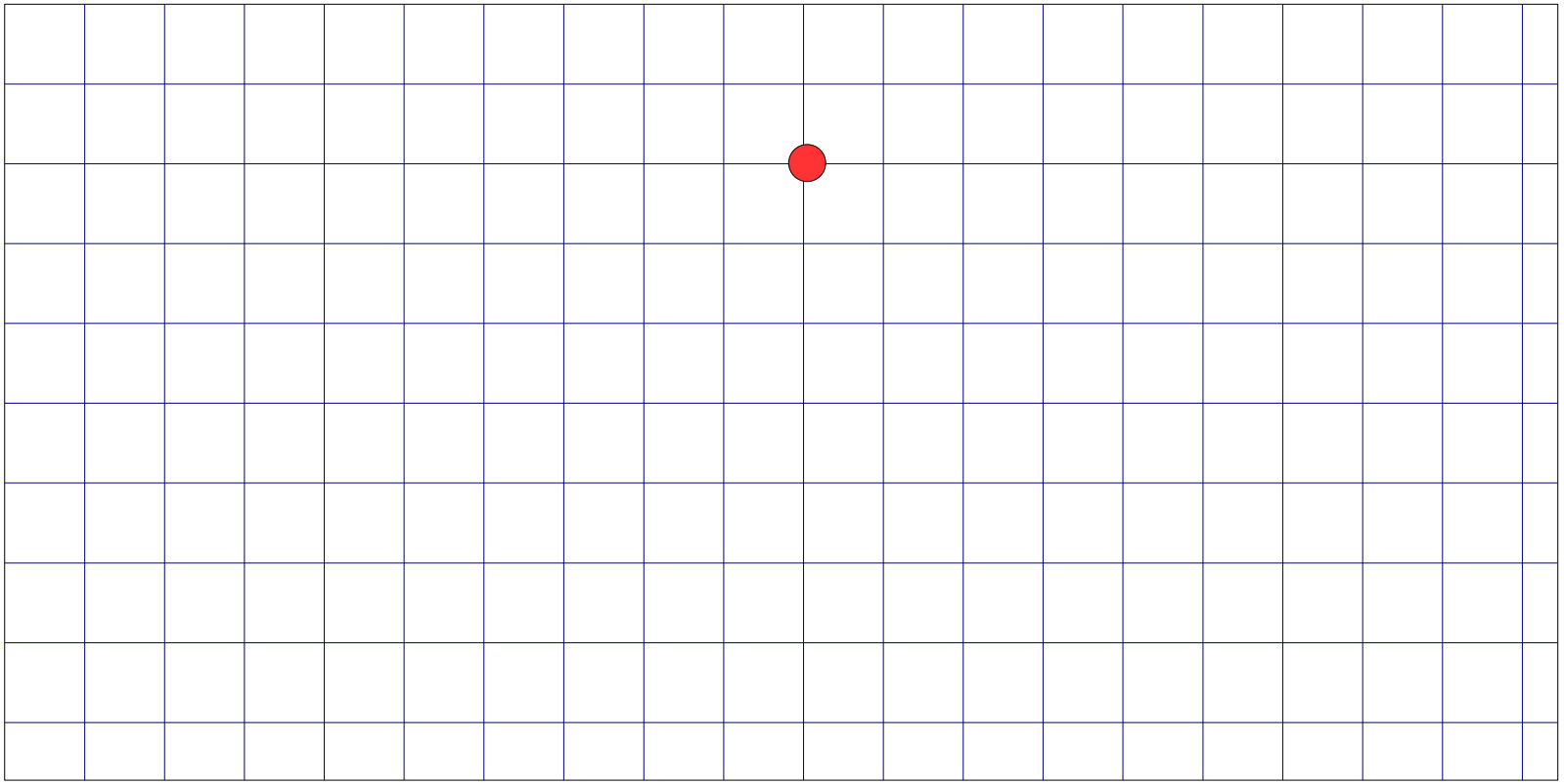


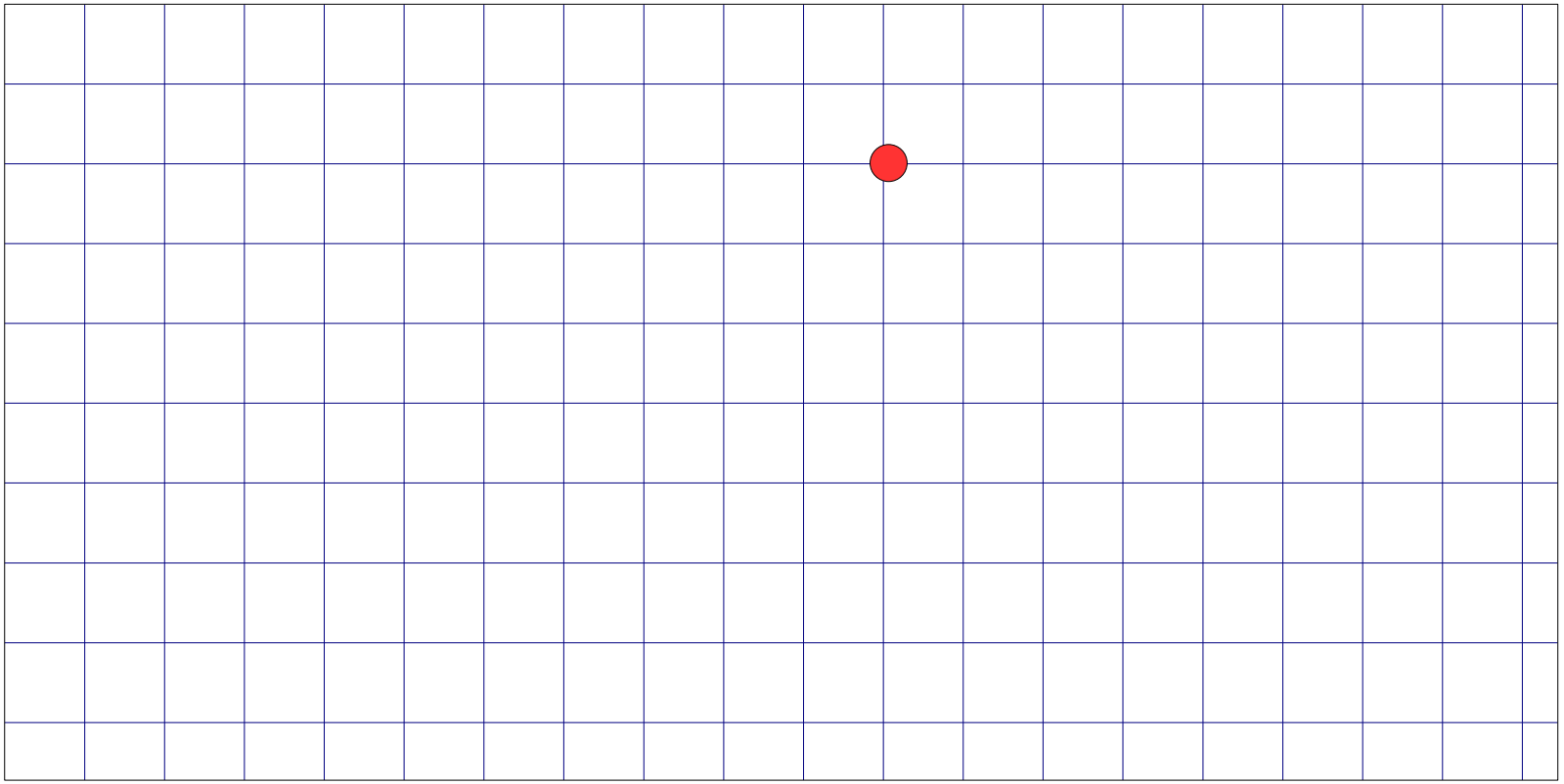


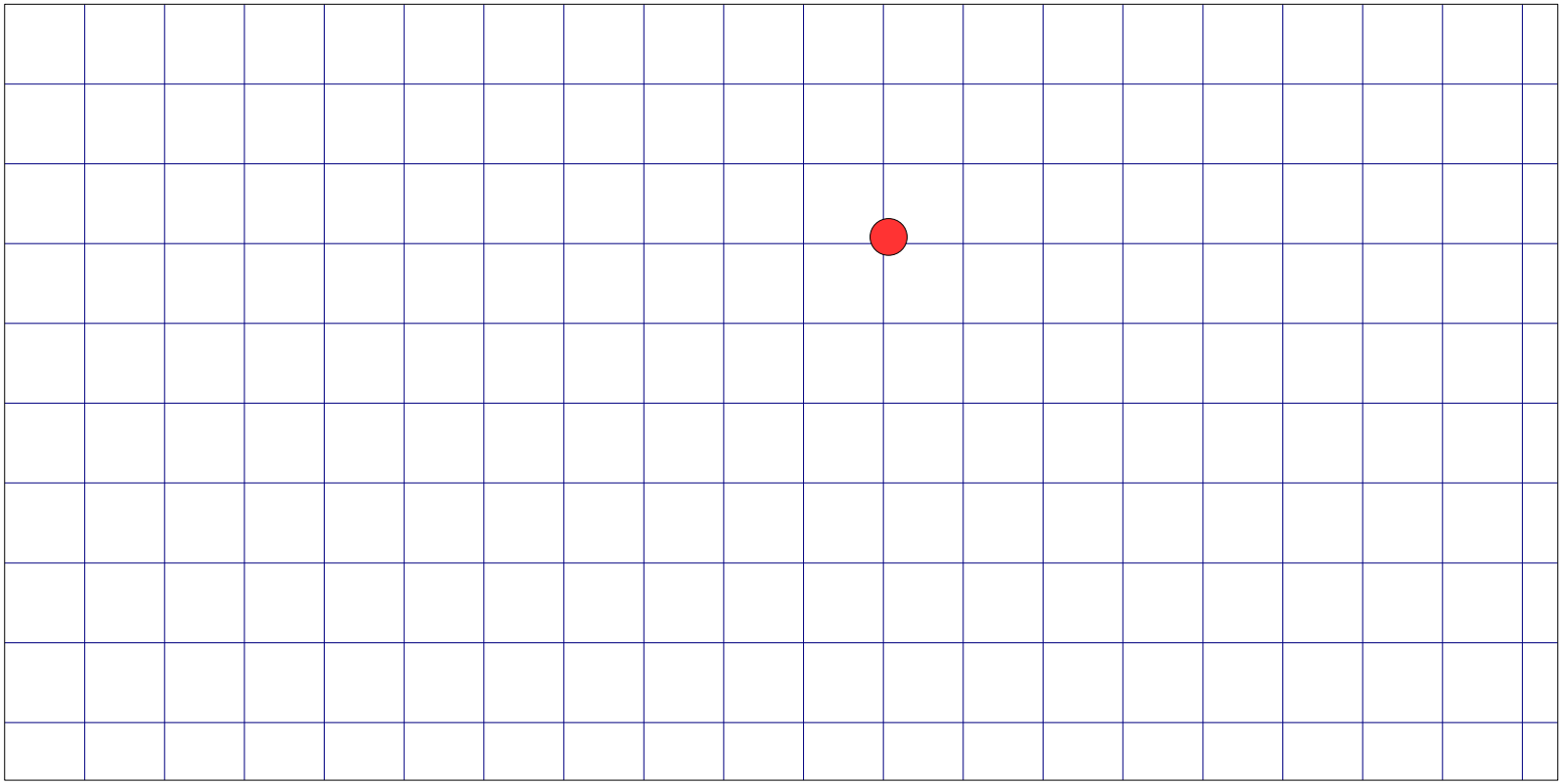


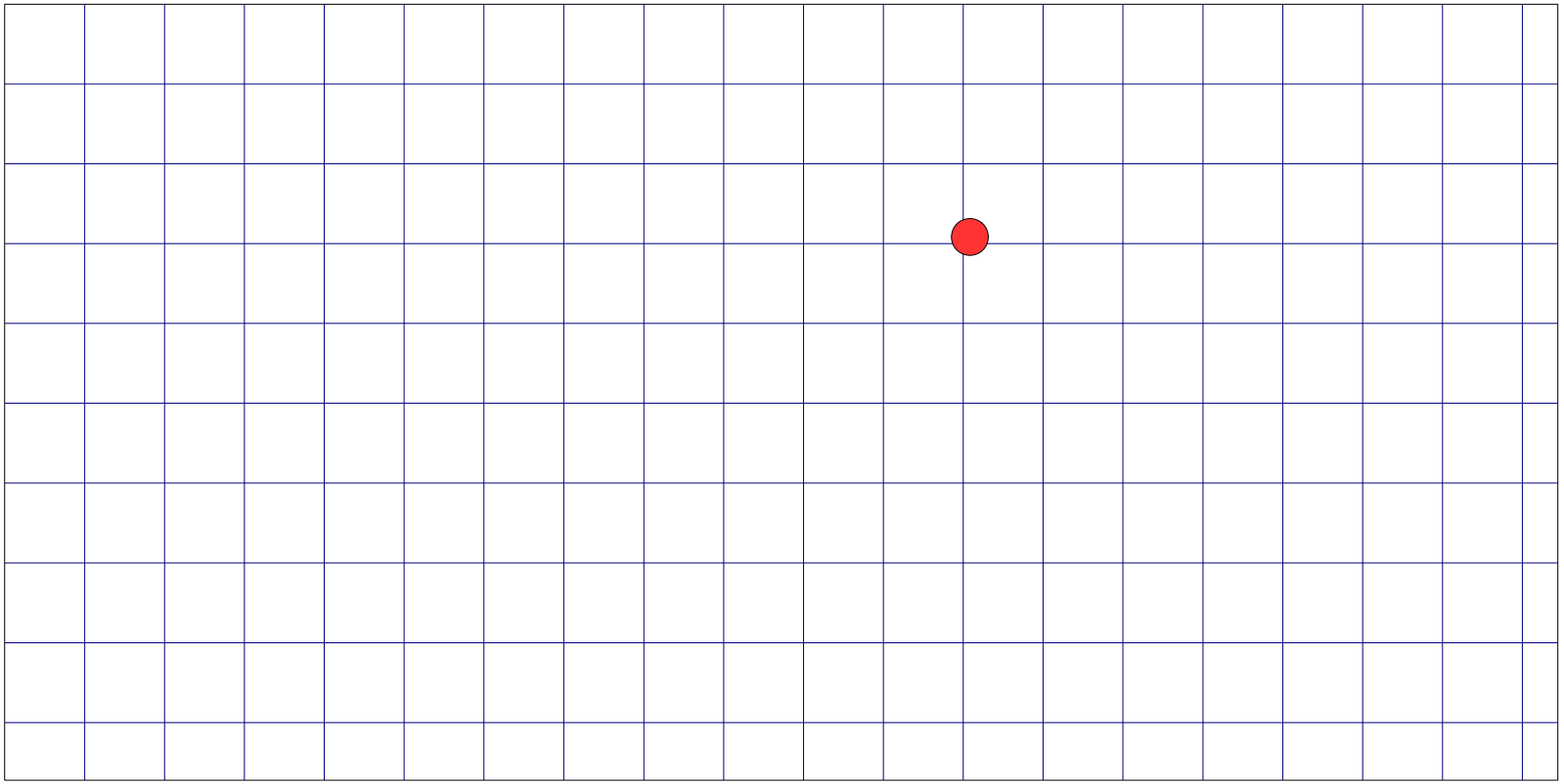


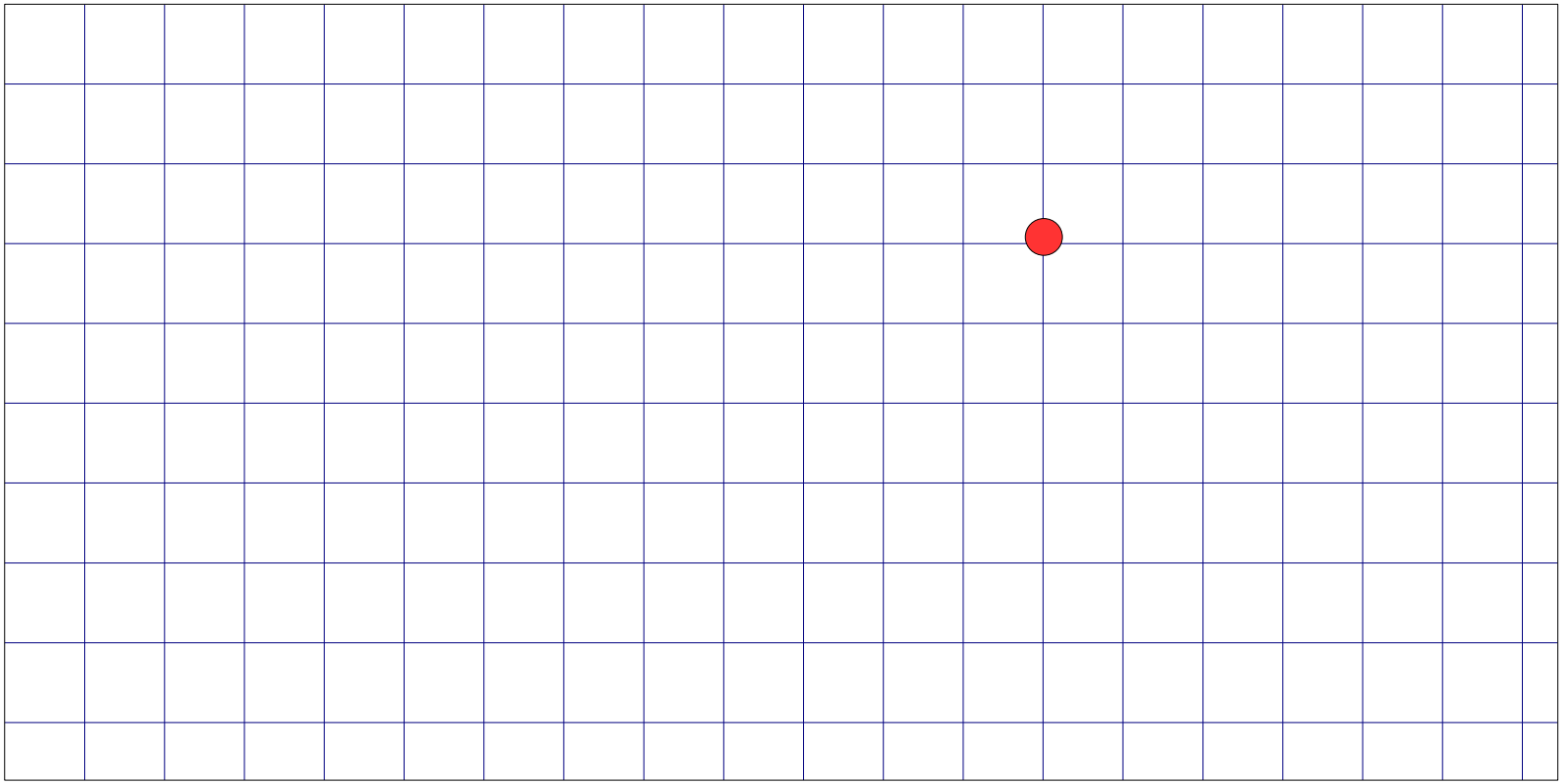


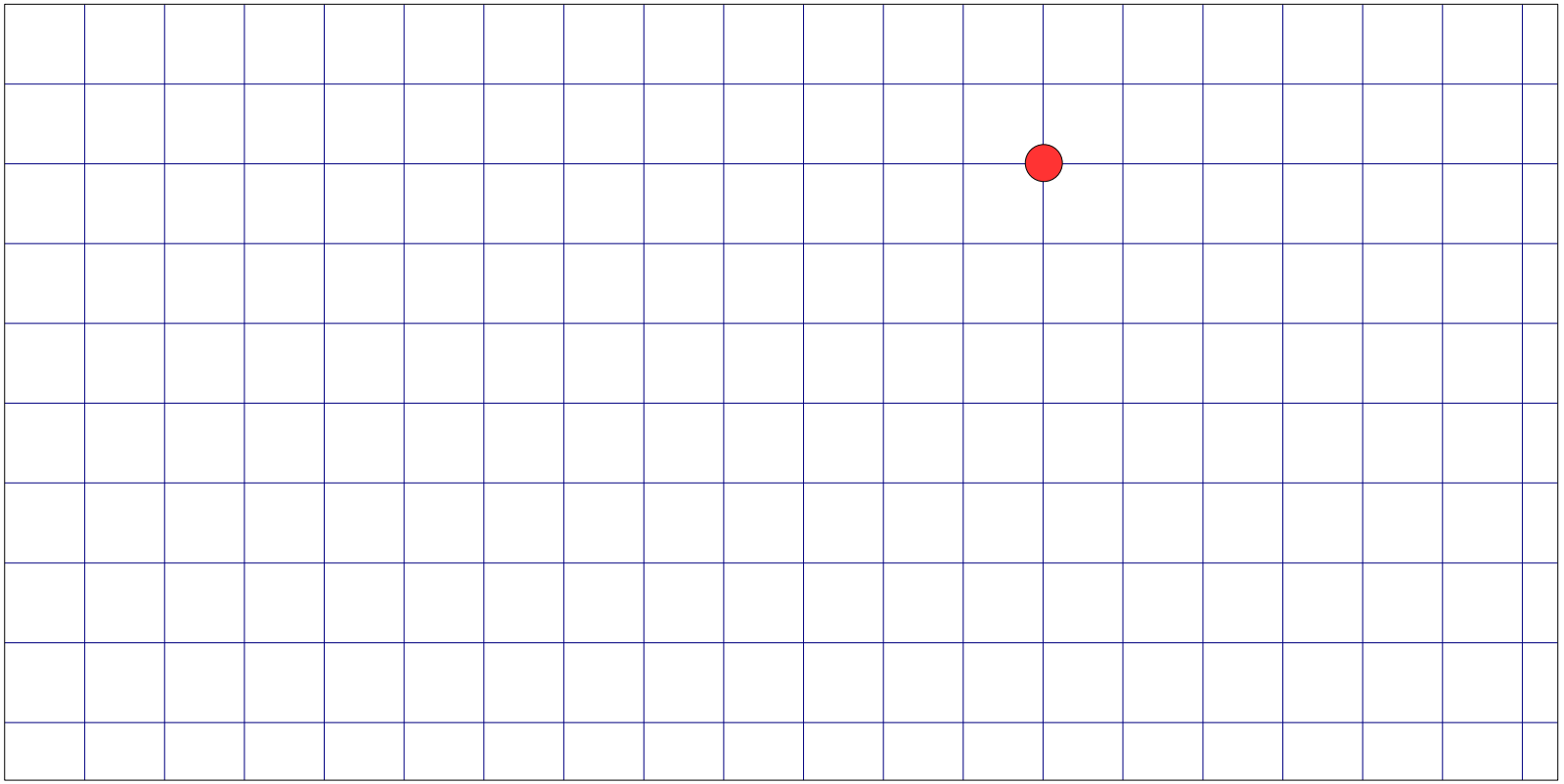


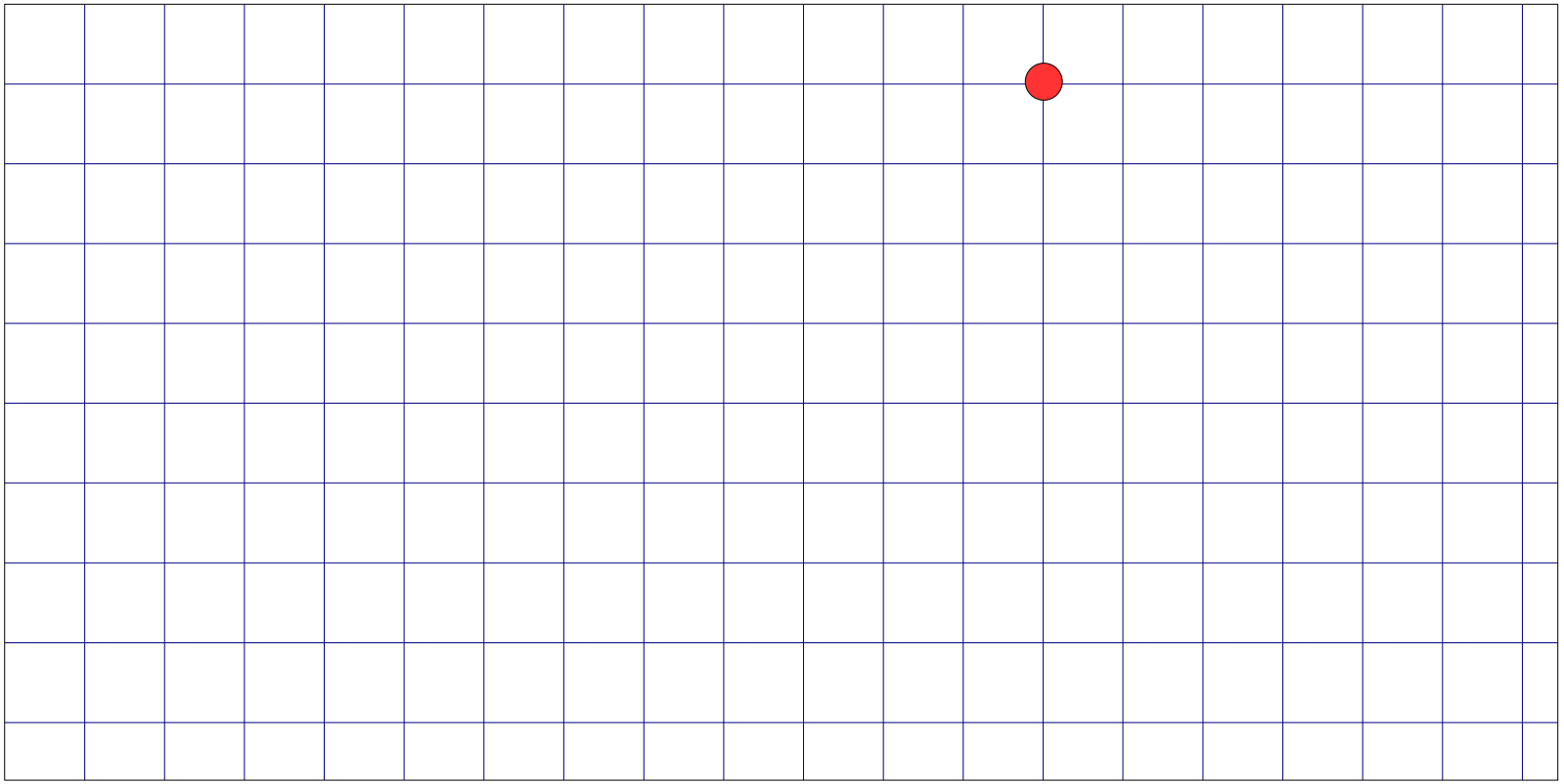


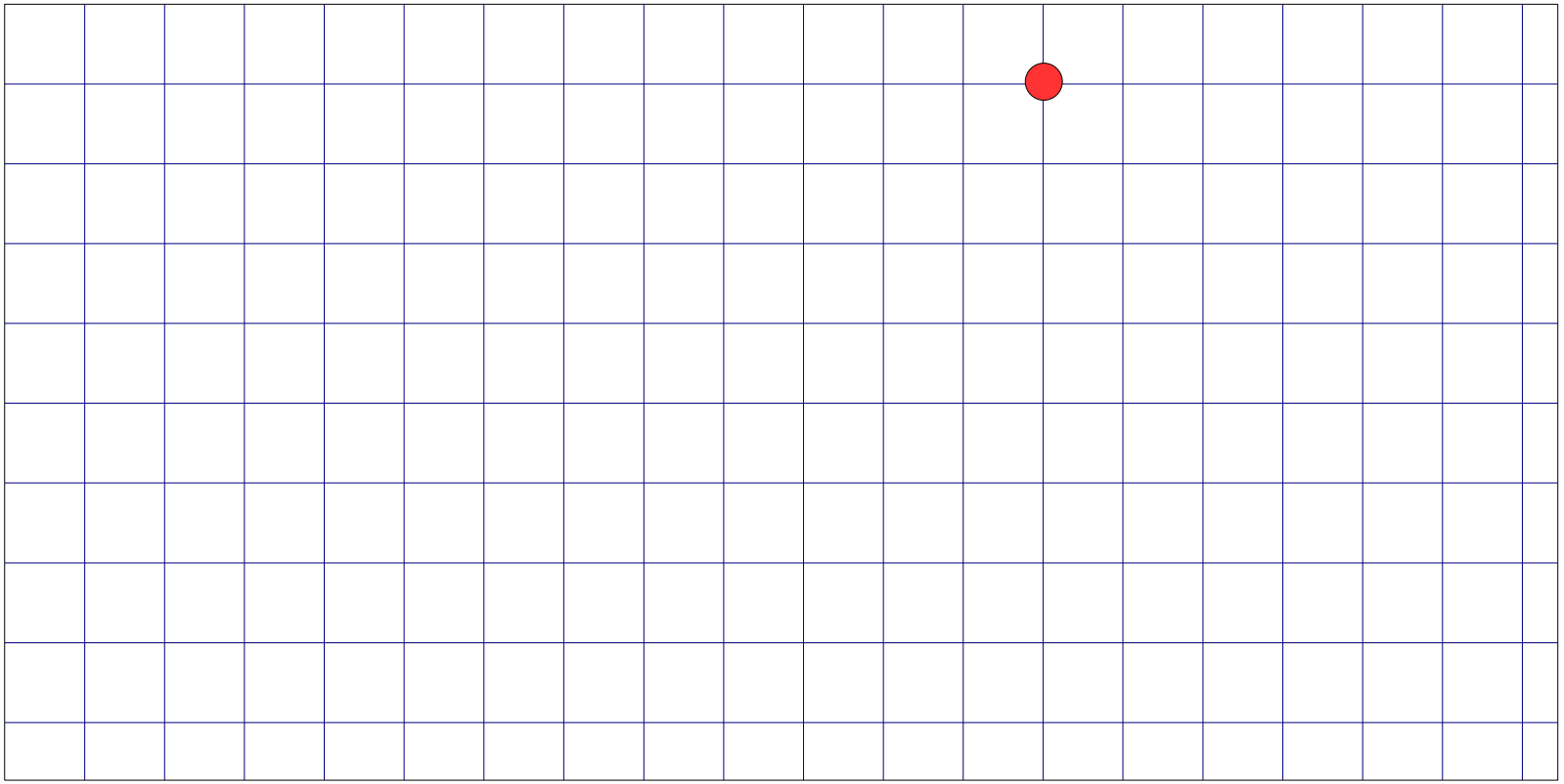












On prouve que le marcheur revient toujours (proba 1)
au point de départ.

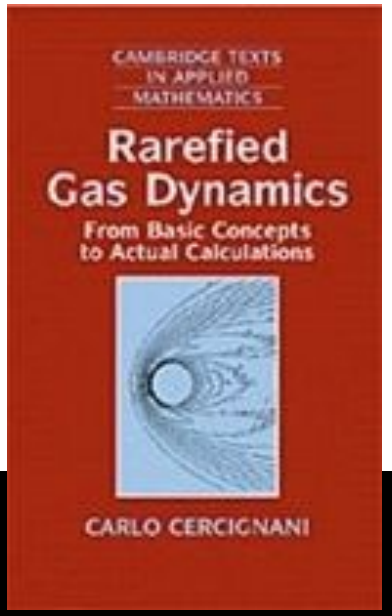
Ceci n'est pas vrai en dimension 3 : probabilité environ 0,34.

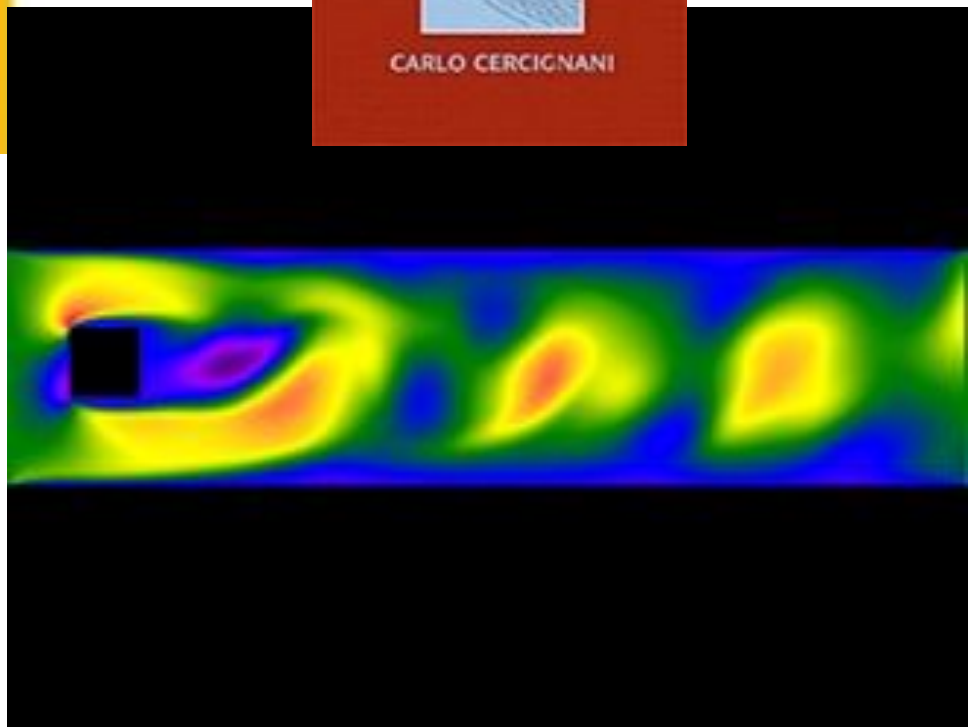
Révolution conceptuelle 1865-1875

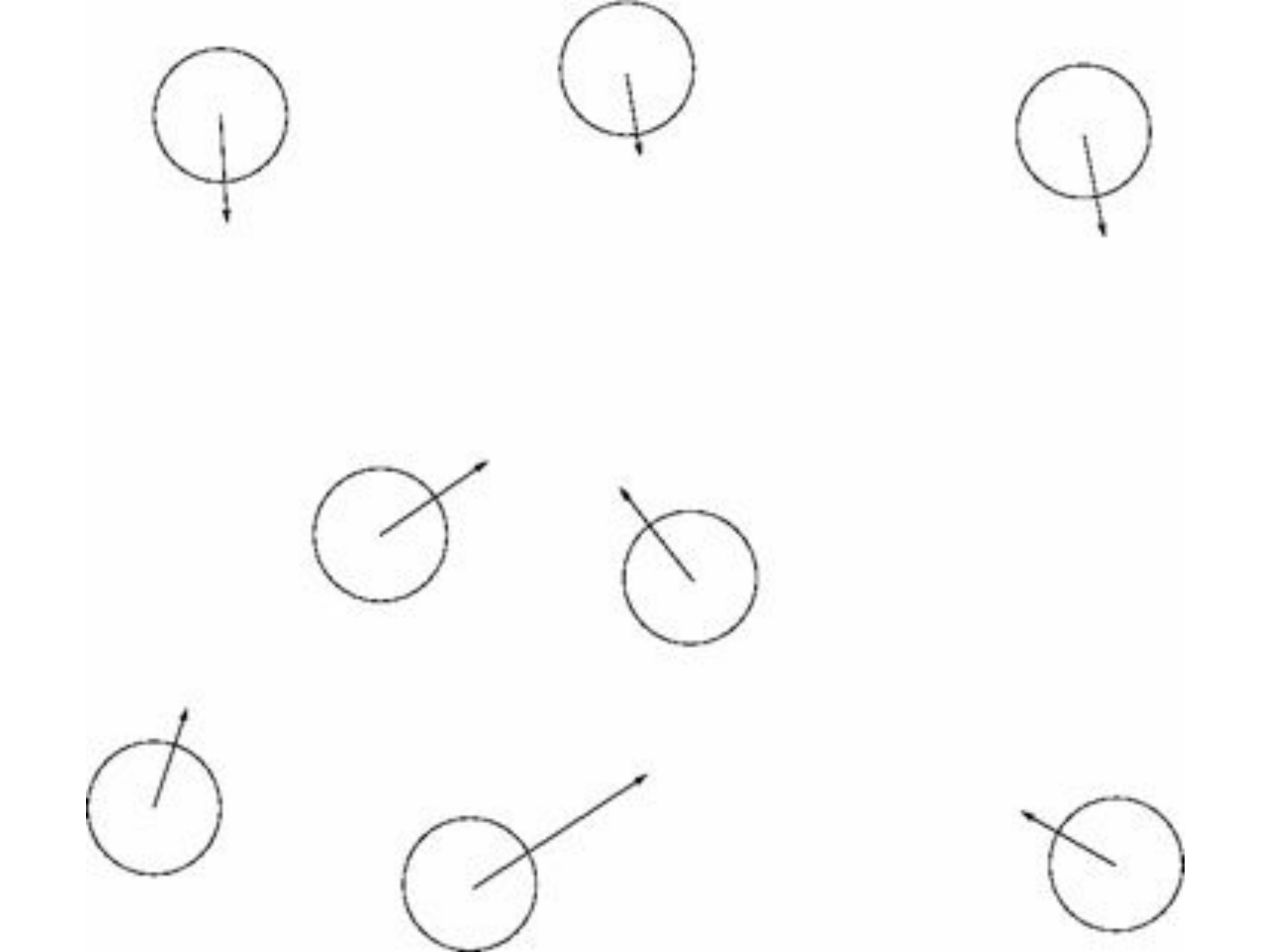
Révolution conceptuelle 1865-1875

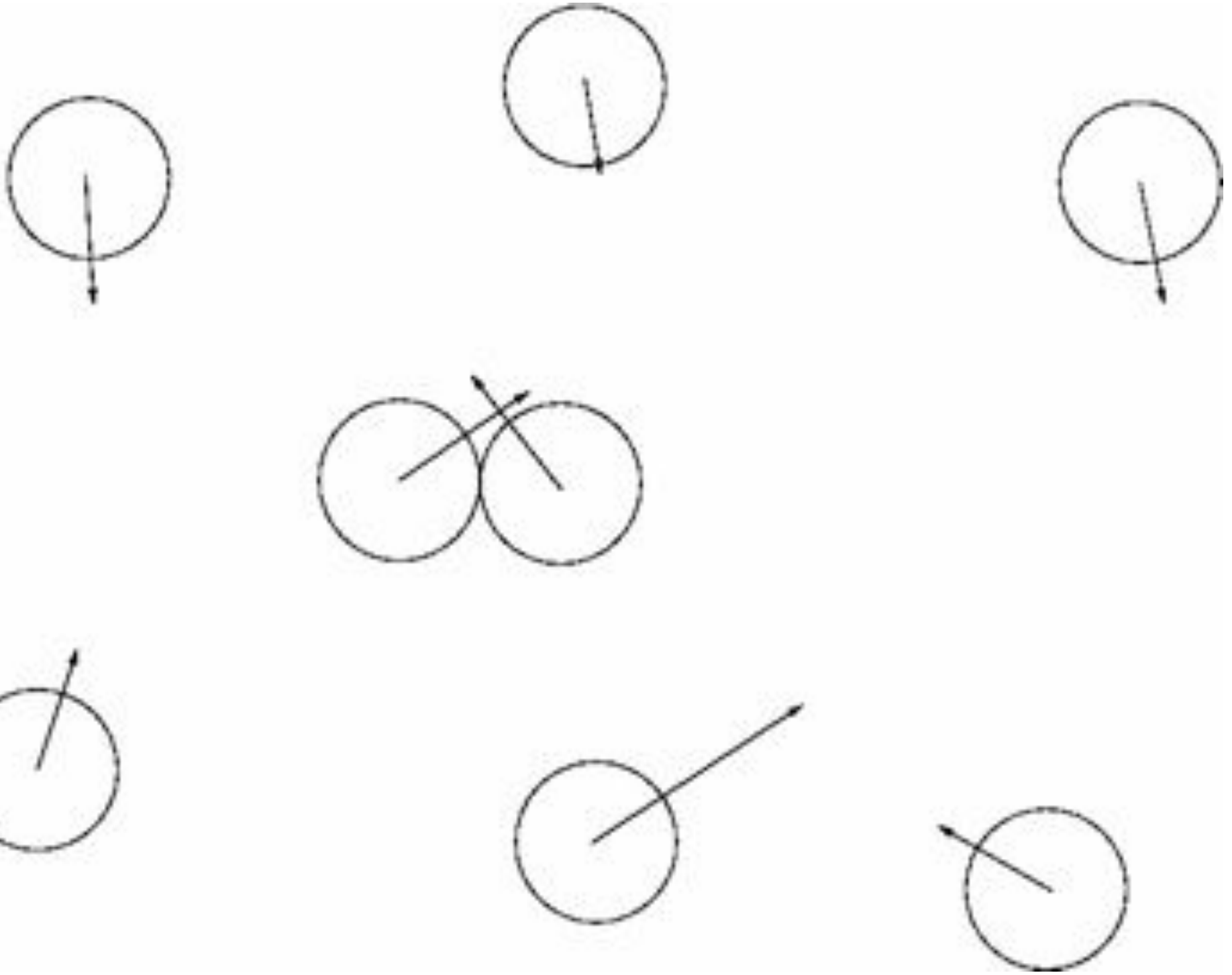
L'équation de Boltzmann

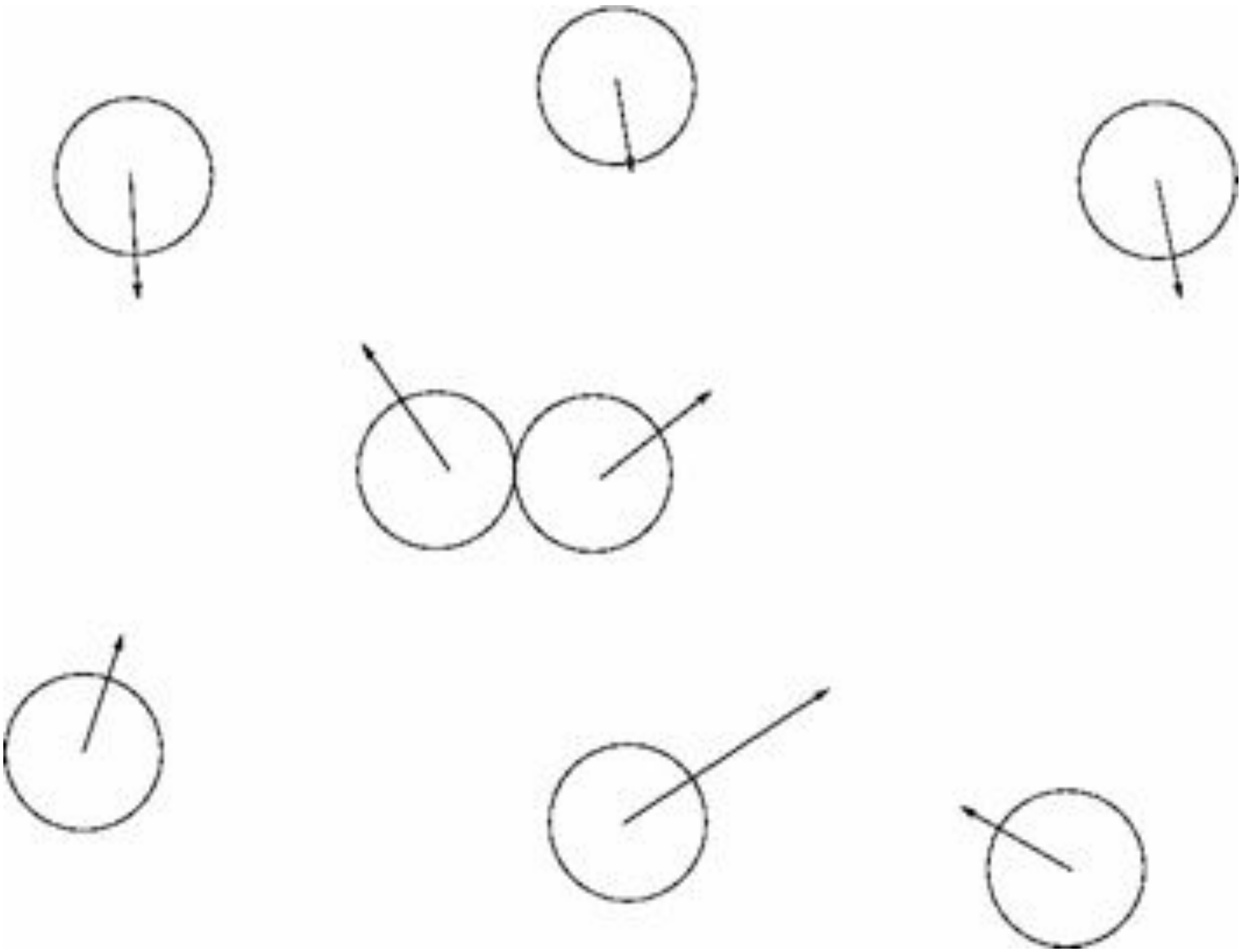
Modélise les gaz raréfiés sous l'hypothèse de chaos moléculaire











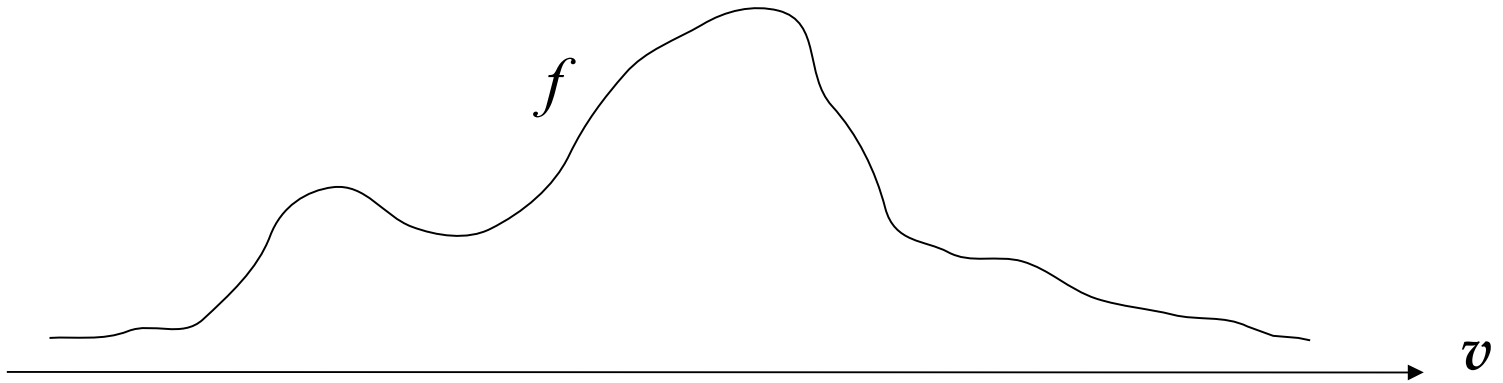
Approche statistique

100000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

Approche statistique

100000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

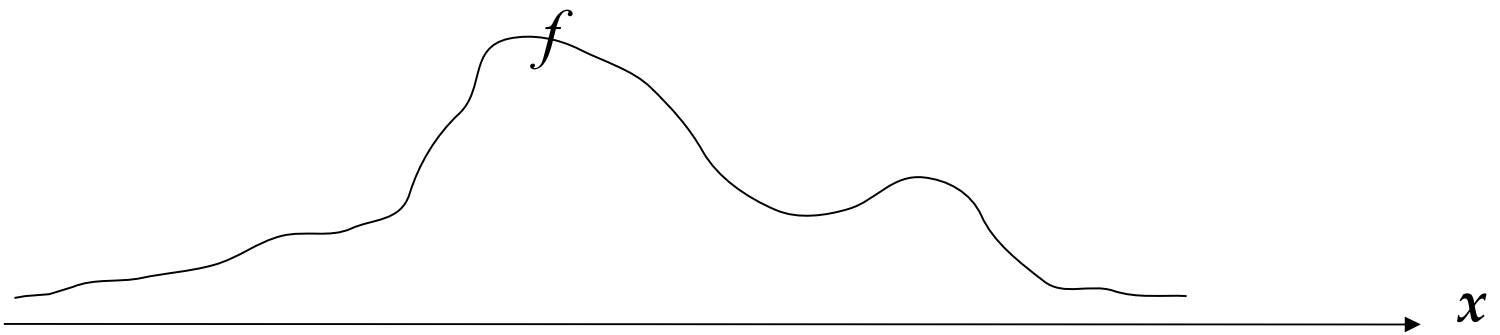
→ **Une** équation sur la densité (= profil statistique) des particules



Approche statistique

100000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

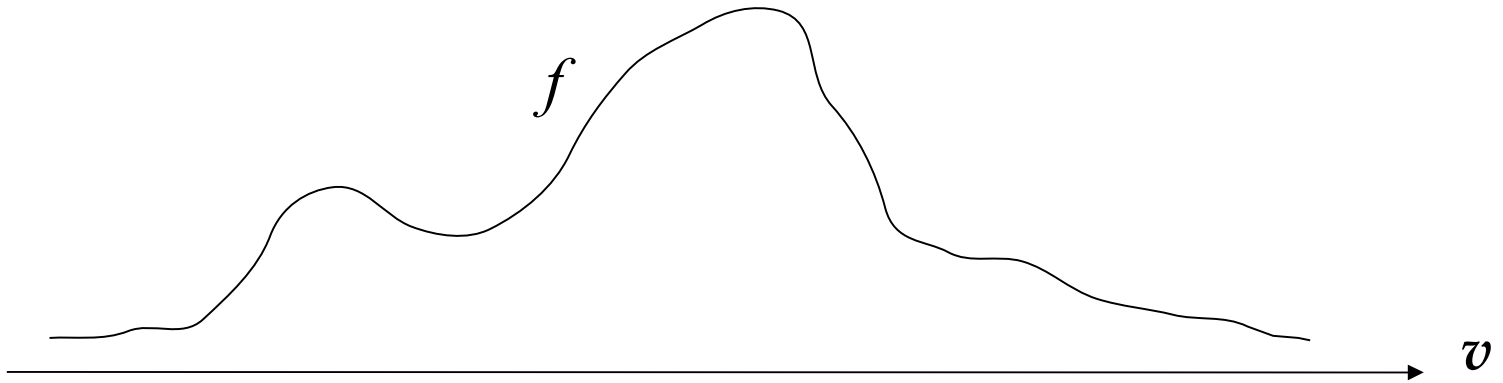
→ **Une** équation sur la densité (= profil statistique) des particules



Approche statistique

100000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

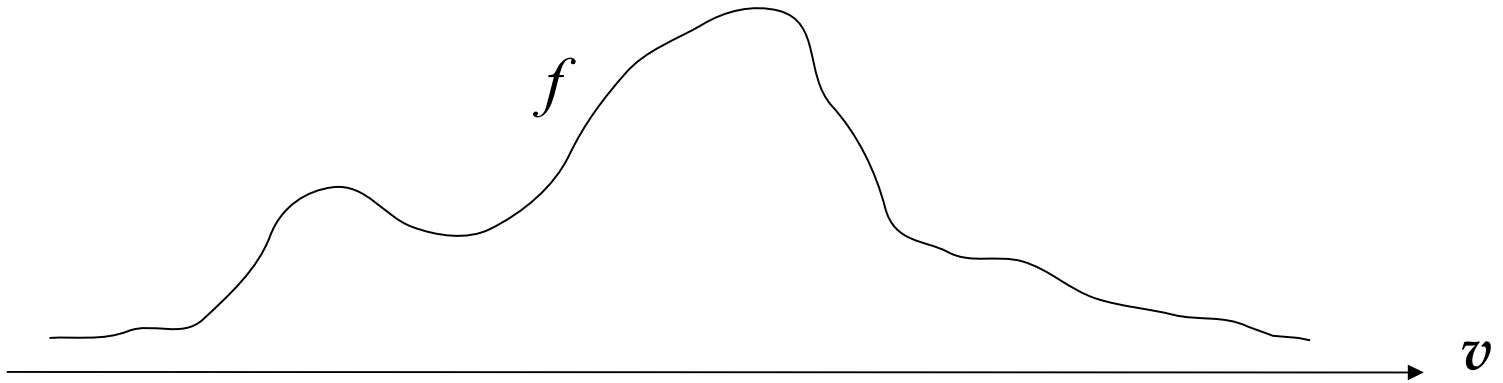
→ **Une** équation sur la densité (= profil statistique) des particules



Approche statistique

100000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

→ **Une** équation sur la densité (= profil statistique) des particules



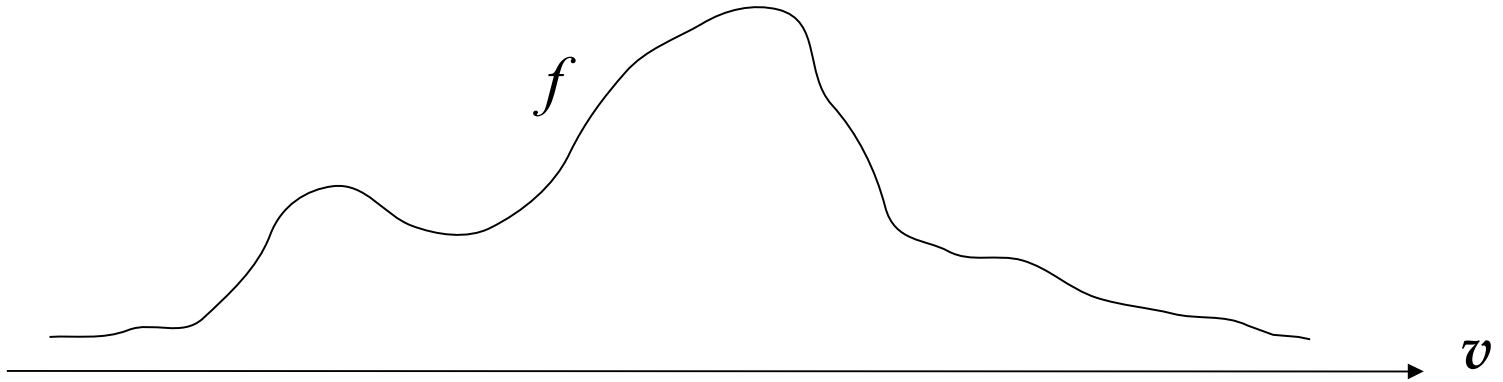
$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)$$

transport collisions

Approche statistique

100000000000000000000 équations sur les positions/vitesses des particules !?

→ **Une** équation sur la densité (= profil statistique) des particules



$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f)$$

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{S^{N-1}} \left[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] |v - v_*| \, d\sigma \, dv_*$$

Du microscopique au macroscopique

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla V *_x \left(\int f \, dv \right) \cdot \nabla_v f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = \varepsilon \, Q_L(f,f)$$

$$= \varepsilon \, \nabla_v \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Pi_{(v-v_*)^\perp}}{|v-v_*|} \left(f(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v f(v_*) \right) dv_* \right\}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\tau}} + \rho \vec{f}$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\, (\rho e + p) \, \vec{v} \,] = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\vec{\tau}} \cdot \vec{v} \right) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r$$

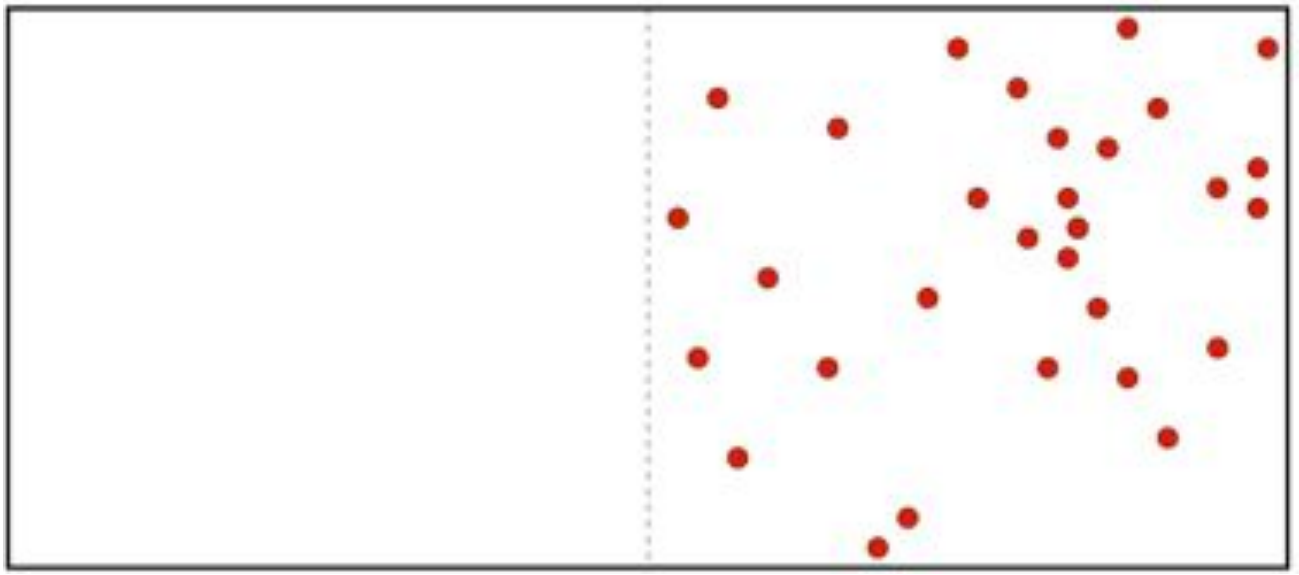
$$\frac{\partial T}{\partial t} = C \, \Delta T = \frac{\partial}{\partial x} \left(C \, \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Autant de mystères !

Ces équations s'appliquent bien mais ne sont pas « démontrées »

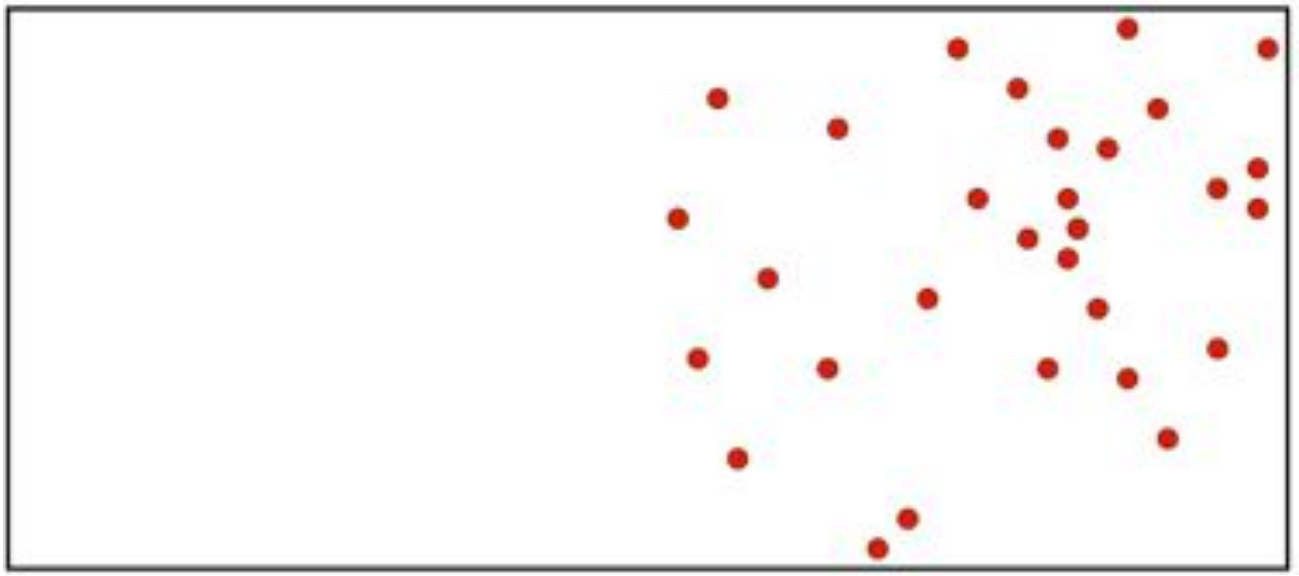
Théorie de Boltzmann

Sous l'effet de processus microscopiques
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



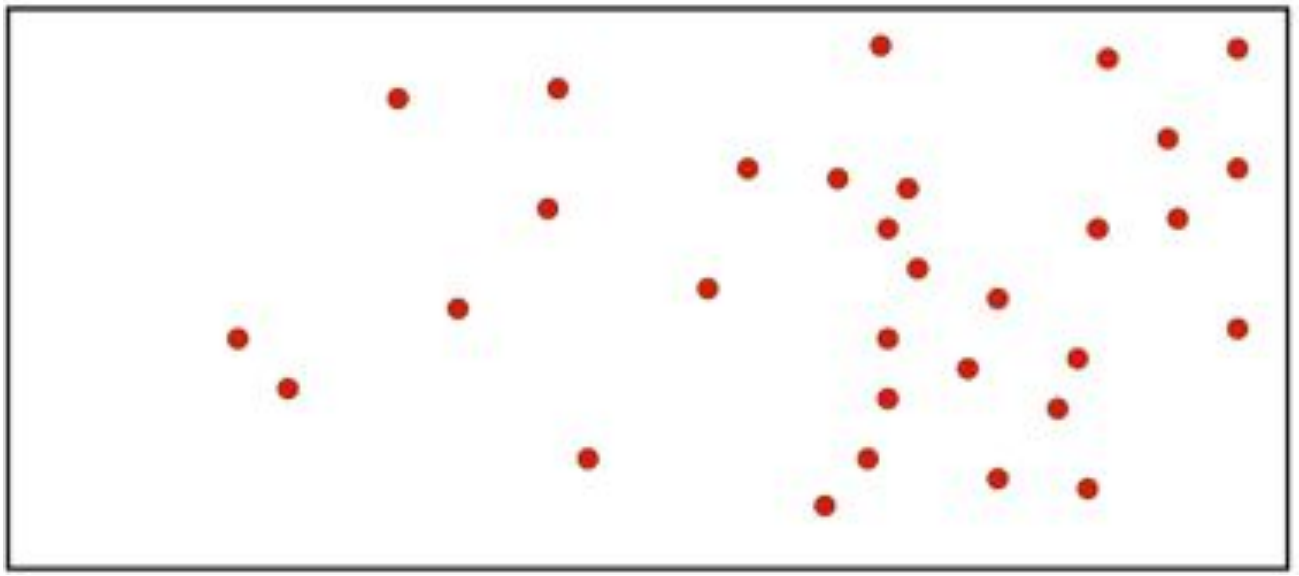
Théorie de Boltzmann

Sous l'effet de processus microscopiques
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



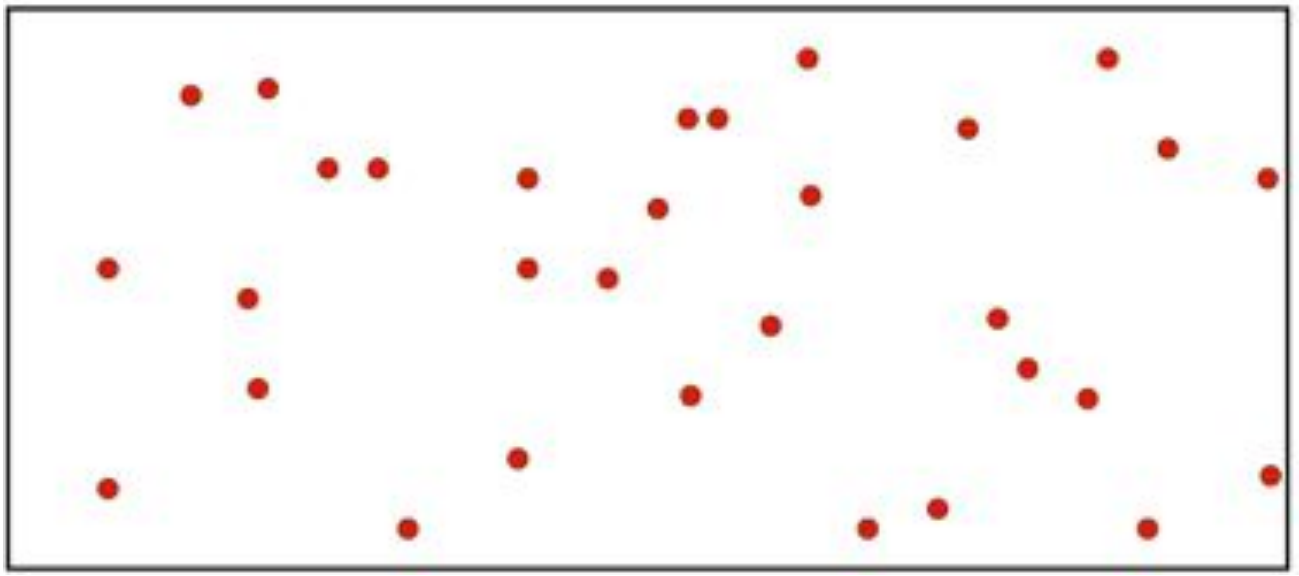
Théorie de Boltzmann

Sous l'effet de processus microscopiques
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



Théorie de Boltzmann

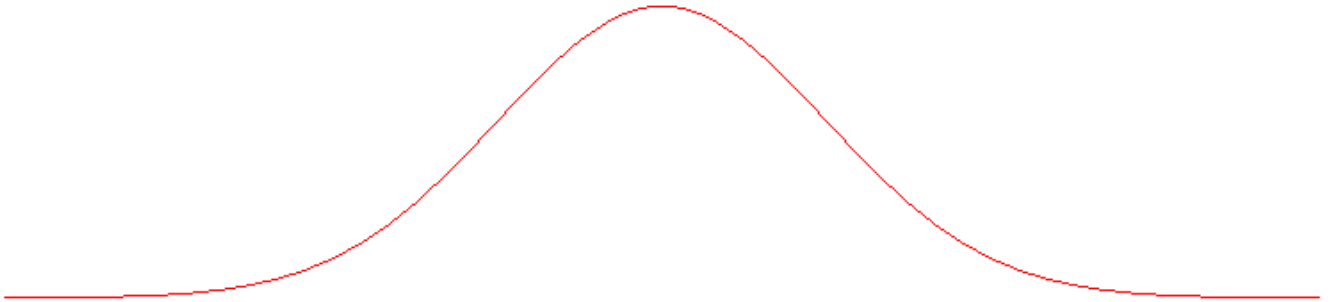
Sous l'effet de processus microscopiques
« aléatoires » et réversibles, l'entropie augmente toujours



Comportement qualitatif d'un gaz classique

La distribution statistique cherche à maximiser son entropie

→ distribution gaussienne



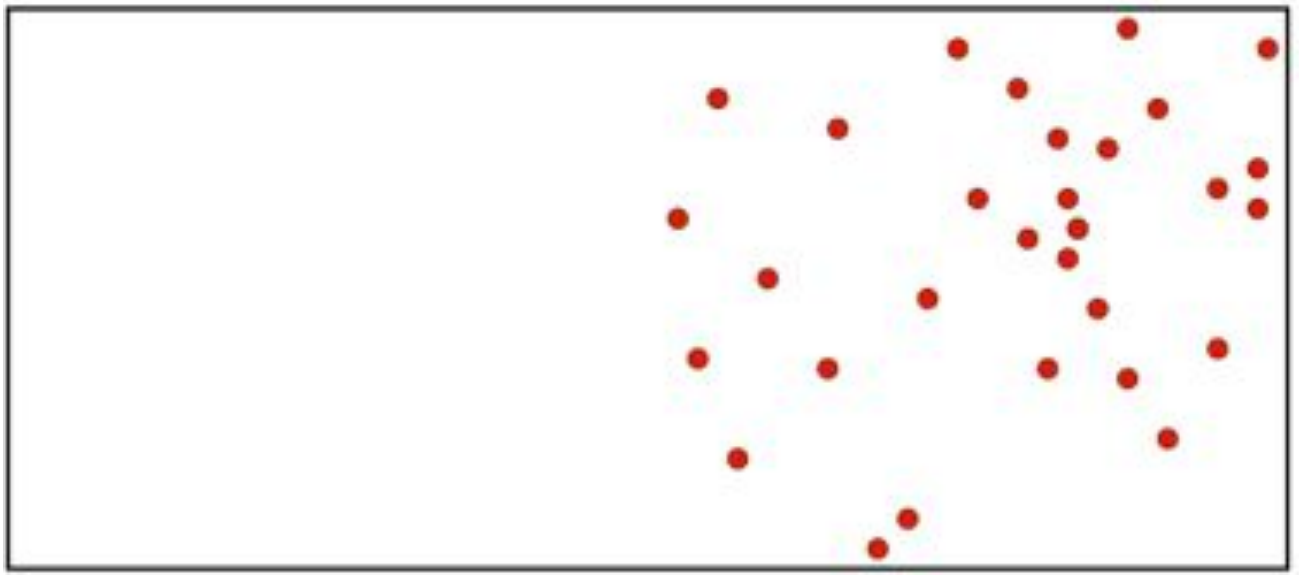
Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une flèche du temps, due au caractère statistique/macroscopique

Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une flèche du temps, due au caractère statistique/macroscopique

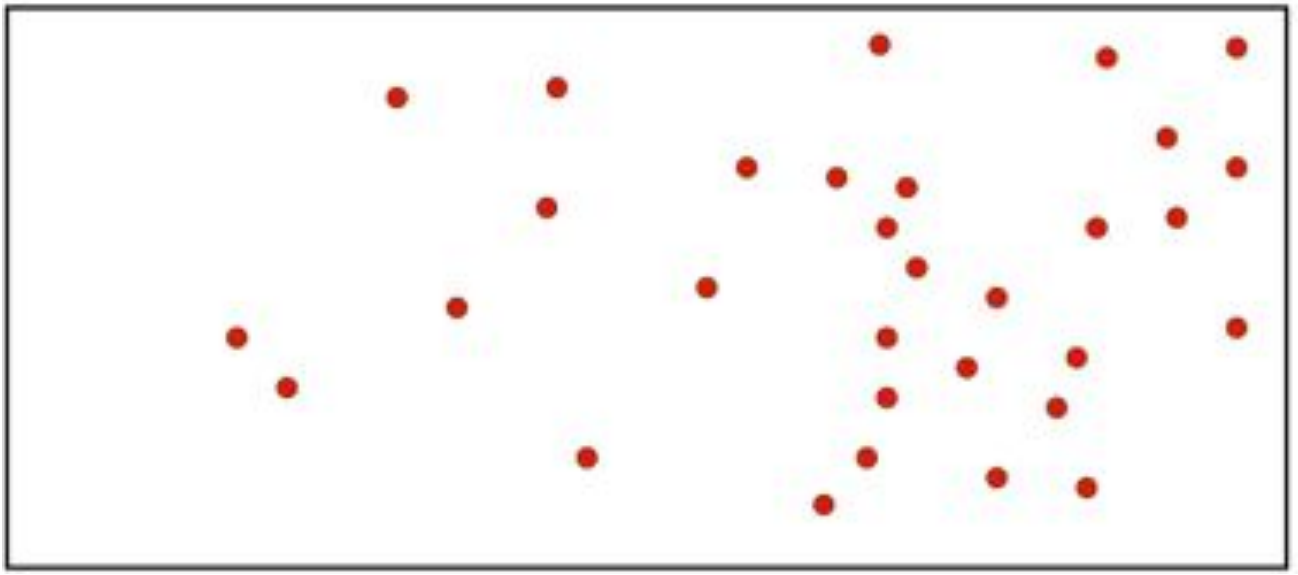
Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une flèche du temps, due au caractère statistique/macroscopique

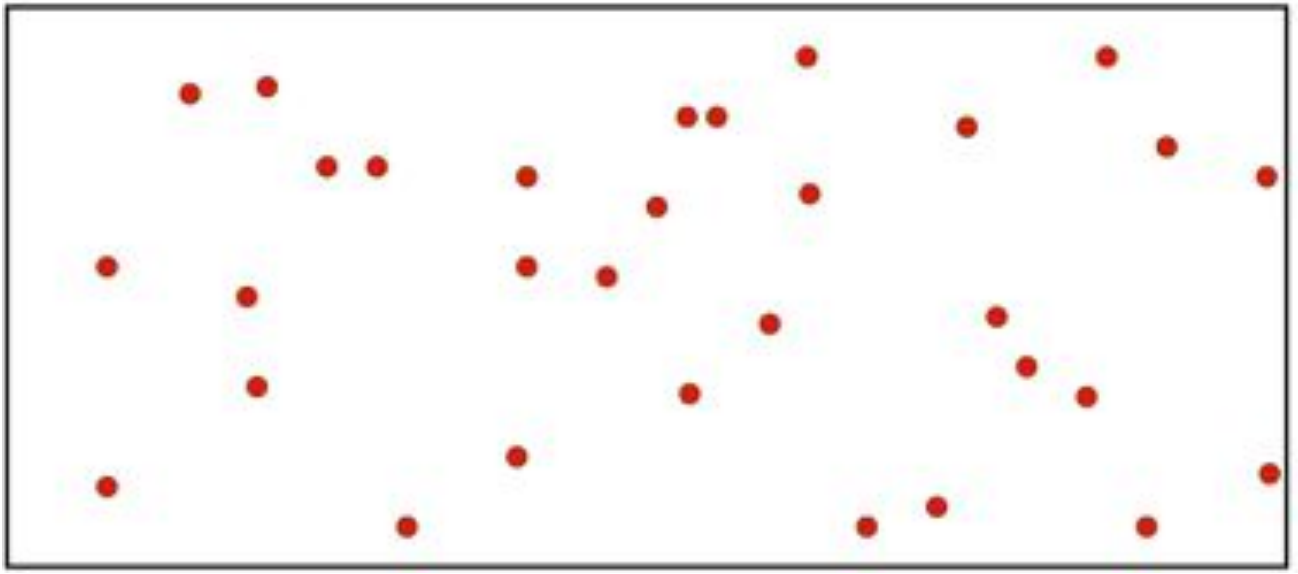
Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une flèche du temps, due au caractère statistique/macroscopique

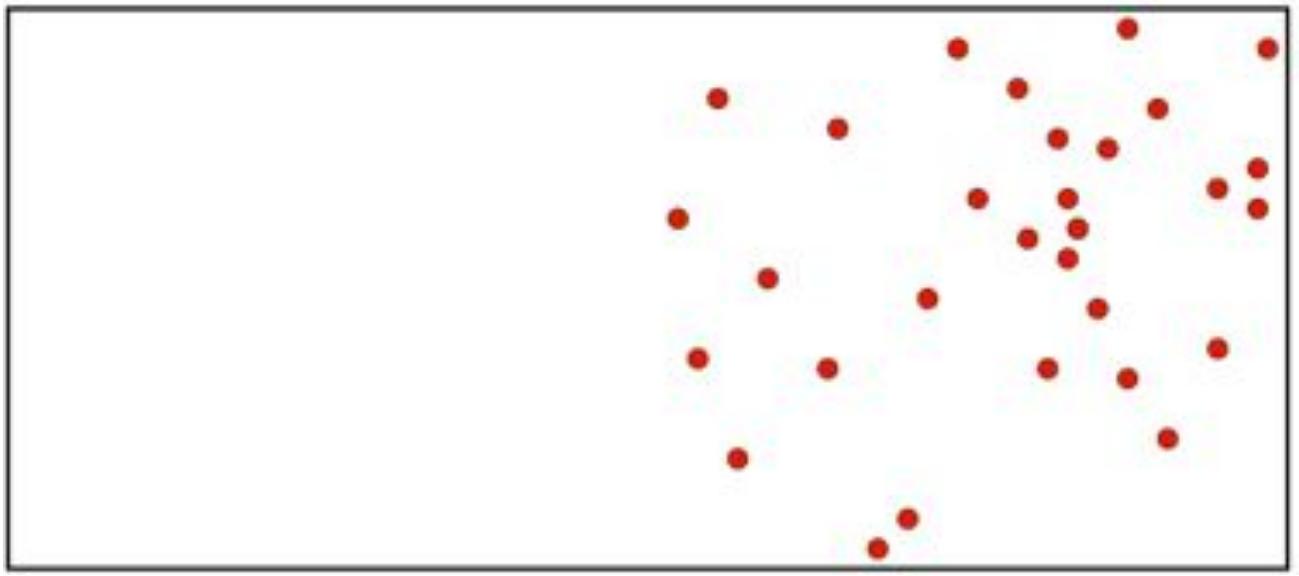
Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



Irréversibilité

La croissance de l'entropie implique une flèche du temps, due au caractère statistique/macroscopique

Paradoxe de Zermelo (Poincaré)



1893

LE MÉCANISME ET L'EXPÉRIENCE

Tout le monde connaît la conception mécaniste de l'univers qui a séduit tant de bons esprits et les différentes formes qu'elle a revêtues.

Les uns se représentent le monde matériel comme formé d'atomes qui se meuvent en ligne droite en vertu de leur inertie ; la vitesse ou la direction de ce mouvement ne peut changer que lorsque deux atomes se choquent.

Les autres admettent l'action à distance et supposent que les atomes exercent les uns sur les autres une attraction (ou une répulsion) qui dépend de la distance suivant une loi quelconque.

La première manière de voir n'est évidemment qu'un cas particulier de la seconde ; ce que je vais dire sera vrai de l'une et de l'autre. Les conclusions les plus importantes s'appliqueraient d'ailleurs au mécanisme cartésien où l'on suppose la matière continue.

Ce serait peut-être ici le lieu de discuter les difficultés métaphysiques que soulèvent ces conceptions ; mais je n'aurais pas pour cela l'autorité nécessaire. Au lieu d'entretenir les lecteurs de cette revue de ce qu'ils savent mieux que moi, je préfère leur parler de sujets qui leur sont moins familiers mais qui peuvent cependant les intéresser indirectement.

Je vais donc m'occuper des obstacles que les mécanistes ont rencontrés quand ils ont voulu concilier leur système avec les faits expérimentaux et des efforts qu'ils ont faits pour les vaincre ou les tourner.

Dans l'hypothèse du mécanisme, tous les phénomènes doivent être *réversibles* ; par exemple les astres pourraient parcourir leurs orbites dans le sens rétrograde sans que la loi de Newton fût violée ; il en

serait encore de même avec une loi d'attraction quelconque. Ce n'est donc pas là un fait particulier à l'astronomie, et la réversibilité est une conséquence nécessaire de toute hypothèse mécaniste.

L'expérience met au contraire en évidence une foule de phénomènes irréversibles. Par exemple si l'on met en présence un corps chaud et un corps froid, le premier cédera de la chaleur au second, le phénomène inverse ne se produira jamais. Et non seulement le corps froid ne restituera pas à l'autre la chaleur qu'il lui a prise lorsqu'ils agiront directement l'un sur l'autre ; mais quel que soit l'artifice qu'on emploie, les corps étrangers qu'on puisse faire intervenir, cette restitution restera impossible à moins que le gain ainsi réalisé ne soit compensé par une perte au moins équivalente. En d'autres termes si un système de corps peut passer de l'état A à l'état B par un certain chemin, il ne pourra pas revenir de l'état B à l'état A ni par le même chemin, ni par un chemin différent. C'est ce qu'on peut exprimer en disant que non seulement il n'y a pas *réversibilité directe*, mais qu'il n'y a pas même *réversibilité indirecte*.

On a cherché de plusieurs manières à échapper à cette contradiction ; d'abord par l'hypothèse des « mouvements cachés » de Helmholtz. On connaît l'expérience faite par Foucault au Panthéon à l'aide d'un très long pendule. Cet appareil semble tourner lentement, mettant ainsi en évidence la rotation terrestre. Un observateur qui ignorerait le mouvement de la terre, ne manquerait pas de conclure que les phénomènes mécaniques sont irréversibles. Le pendule tourne toujours dans le même sens et on n'a aucun moyen de le faire tourner en sens inverse ; il faudrait pour cela changer le sens de la rotation du globe. Un pareil changement est bien entendu irréalisable ; mais pour nous il est concevable ; il ne le serait pas pour un homme qui croirait notre planète immobile.

Eh bien, ne peut-on imaginer qu'il existe dans le monde moléculaire des mouvements analogues, qui sont cachés pour nous, sur lesquels nous n'avons aucune prise et dont nous ne pouvons changer le sens ?

Cette explication est séduisante, mais elle est insuffisante ; elle fait voir pourquoi il n'y a pas de réversibilité *directe* ; mais on démontre qu'il devrait y avoir quand même réversibilité *indirecte*.

Les Anglais ont proposé une hypothèse toute différente. Pour la faire comprendre, je me servirai encore d'une comparaison : si l'on a un hectolitre de blé et un grain d'orge, il sera facile de cacher ce

grain au milieu du blé; mais il sera presque impossible de le retrouver, de sorte que le phénomène semblera en quelque sorte irréversible. Cela tient à ce que les grains sont petits et nombreux; l'irréversibilité apparente des phénomènes naturels tiendrait de même à ce que les molécules sont trop petites et trop nombreuses pour la grossièreté de nos sens.

Pour mieux le faire comprendre, Maxwell introduit la fiction d'un « démon » dont les yeux seraient assez subtils pour distinguer les molécules, les mains assez petites et assez rapides pour les saisir. Pour un pareil démon, si l'on en croit les mécanistes, il n'y aurait pas de difficulté à faire passer de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

C'est du développement de cette idée qu'est née la théorie cinétique des gaz qui est jusqu'ici la tentative la plus sérieuse de conciliation entre le mécanisme et l'expérience.

Toutes les difficultés ne sont pas vaincues cependant.

Un théorème facile à établir nous apprend qu'un monde limité soumis aux seules lois de la mécanique, repassera toujours par un état très voisin de son état initial. Au contraire, d'après les lois expérimentales admises (si on leur attribue une valeur absolue et qu'on veuille en pousser les conséquences jusqu'au bout), l'univers tend vers un certain état final dont il ne pourra plus sortir. Dans cet état final, qui sera une sorte de mort, tous les corps seront en repos et à la même température.

Je ne sais si l'on a remarqué que les théories cinétiques anglaises peuvent se tirer de cette contradiction? Le monde, d'après elles, tend d'abord vers un état où il restera longtemps sans changement apparent; et cela est conforme à l'expérience; mais il ne s'y maintiendra pas toujours, de sorte que le théorème cité plus haut n'est pas violé; il y demeurera seulement pendant un temps énorme, d'autant plus long que les molécules seront plus nombreuses. Cet état ne sera donc pas la mort définitive de l'univers, mais une sorte de sommeil, d'où il se réveillera après des millions de millions de siècles.

A ce compte, pour voir la chaleur passer d'un corps froid à un corps chaud, il ne serait plus nécessaire d'avoir la vue fine, la présence d'esprit, l'intelligence et l'adresse du démon de Maxwell, il suffirait d'un peu de patience.

On voudrait pouvoir s'arrêter à cette étape et espérer qu'un jour le

télescope nous montrera un monde en train de se réveiller et où les lois de la thermodynamique seront renversées.

Malheureusement d'autres contradictions surgissent; Maxwell fait d'ingénieux efforts pour en triompher. Mais je ne suis pas sûr qu'il y ait réussi. Le problème est tellement compliqué qu'il est impossible de le traiter avec une complète rigueur. On est donc forcé de faire quelques hypothèses simplificatrices; sont-elles légitimes, sont-elles même conciliables entre elles? Je ne le crois pas. Je ne veux pas les discuter ici; mais il n'est pas besoin d'un long examen pour se défier d'un raisonnement où les prémisses sont en contradiction au moins apparente avec la conclusion, où l'on trouve en effet la réversibilité dans les prémisses et l'irréversibilité dans la conclusion.

Ainsi l'on n'est pas arrivé à tourner la difficulté qui nous occupe et il est peu probable qu'on y parvienne jamais. Ce serait même là une condamnation définitive du mécanisme si les lois expérimentales pouvaient être autre chose que des lois approchées.

H. POINCARÉ.

Théorème de Lanford (1973)

Lanford obtient rigoureusement l'équation
de Boltzmann pour N sphères dures de rayon r,
dans la limite $N >> 1 \quad r << 1 \quad N r^2 \sim 1$

Sous une hypothèse de chaos moléculaire fort
au temps initial, et sur un petit intervalle de temps....

Son résultat laisse de nombreuses questions en suspens,
en particulier il ne dit rien sur la propagation du chaos
qui est probablement le « moteur » de l'équation de Boltzmann

Mais il établit un **pont rigoureux** entre le monde microscopique
inaccessible de Newton et le monde macroscopique,
statistique et prévisible, de Boltzmann

QUELQUES RÉFÉRENCES

Le mémoire de Poincaré pour le prix du Roi Oscar II, F. Béguin (2006), in ***L'Héritage scientifique de Poincaré***

Mécanisme et Expérience, H. Poincaré, Revue de Métaphysique et Morale (1893)

(Ir)réversibilité et entropie, C. V. Séminaire Poincaré sur ***Le Temps*** *(2010)*

Sur les EDP de la physique mathématique (Intro, 1890)

La Valeur de la Science (1901)
Science et Hypothèse (1905)
Science et Méthode (1908)

17 novembre 2012 : Journée Henri Poincaré à la Sorbonne