

∞ Concours contrôleur des douanes session 20 novembre 2023 ∞

**BRANCHE DU CONTRÔLE DES OPÉRATIONS COMMERCIALES ET
DE L'ADMINISTRATION GÉNÉRALE**

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. *Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.*

Exercice 1

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + 3}.$$

On note f' sa dérivée.

1. Donner son ensemble de définition \mathcal{D}_f . Justifier.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{-12x^2 - 24x + 36}{(x^2 + 3)^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .
4. f possède-t-elle des extremums locaux?
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de cette fonction au point d'abscisse 0.

Exercice 2

On considère un entier naturel n et les fonctions

$$f(x) = (1 + x)^n \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + nx.$$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geq g(x)$.
2. Soit un nombre réel $q > 1$ et (u_n) la suite définie pour tout naturel n par $u_n = q^n$. Étudier la limite de la suite (u_n) .
3. On considère maintenant que $0 < q < 1$.
En posant $q = \frac{1}{p}$, déduire de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \text{ et} \\ u_{n+1} & = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par la relation

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Prouver que la suite (v_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2. Calculer v_0
3. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
4. Exprimer v_n en fonction de n .
5. Quelle est la limite de (v_n) ?
6. Exprimer u_n en fonction de v_n .
7. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 4

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

Une entreprise est composée de trois services A, B, et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.

Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

- 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise;
- 20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise;
- 80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :

- A : « l'employé fait partie du service A »
- B : « l'employé fait partie du service B »
- C : « l'employé fait partie du service C »
- T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité d'un événement E est notée $p(E)$ et celle de E sachant F est notée $p_F(E)$.

1.
 - a. Justifier $p(A) = 0,450$.
 - b. Donner $p_A(T)$.
 - c. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.
2. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.
3. Montrer que $p(T) = 0,482$.

Pour la question 4, le candidat ne donnera pas de valeur calculée approchée. Le résultat sera présenté sous forme de fraction.

4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
5. On choisit successivement et de manière indépendante 5 employés de l'entreprise.
On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 employés d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail.

Partie II

Cette entreprise souhaite faire une offre de transport auprès de ses employés. Un sondage auprès de quelques employés est effectué afin d'estimer la proportion d'employés dans l'entreprise intéressée par cette offre de transport. On souhaite ainsi obtenir un intervalle de confiance d'amplitude strictement inférieur à 0,15 avec un niveau de confiance de 95%.
Quel est le nombre minimal d'employés à consulter ?

Aide aux calculs, si besoin :

$$\begin{aligned} \frac{1}{0,15} &\approx 6,7 & \left(\frac{1}{0,15}\right)^2 &\approx 44,4 \\ \frac{2}{0,15} &\approx 13,3 & \left(\frac{1}{0,15}\right)^2 &\approx 177,8 \\ \frac{2}{0,95} &\approx 2,1 & \left(\frac{2}{0,95}\right)^2 &\approx 4,4 \\ \frac{1}{0,15} &\approx 1,1 & & \end{aligned}$$