∽ Concours contrôleur des douanes ∾
session 2018

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

— Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

— Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice n° 1 :

Deux sociétés spécialisées dans le commerce de voitures, les sociétés « Bonne Route » et « Voyage », se partagent un marché stable de 20 millions de clients. Au 1er janvier 2018, la société « Bonne Route » compte 16 millions de clients et la société « Voyage » compte 4 millions de clients. Les prévisions du marché laissent apparaître que, chaque année, la société « Bonne Route » perdra 20 % de ses clients au profit de la société « Voyage » et que la société« Voyage » perdra elle aussi 20 % de ses clients au profit de la société « Bonne Route ».

1. Soit U_n le nombre de clients (en millions) de la société « Voyage » au 1er janvier de l'année $2018 + n$. On déduit de l'énoncé que $U_0 = 4$.

   a. Montrer que $U_1 = 6,4$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,6 \times U_n + 4$.

2. On considère la suite (V_n) définie, pour tout naturel n, par $V_n = U_n - 10$.

   a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

   b. Calculer V_0

   c. Sachant que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n en fonction de n et de V_0.

   d. En déduire U_n en fonction de n.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice n° 2 :

N. B. : Pour cet exercice les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

Une classe comprend 20 élèves : 12 filles et 8 garçons.

1. Trois élèves de la classe sont tirés au sort pour devenir délégués de classe.

   a. Une combinaison correspondant au tirage au sort de 3 élèves parmi les 20 présents, montrer que le nombre total de combinaisons possibles est de 1 140.

   b. Montrer que la probabilité que 3 filles soient déléguées de classe est de $\dfrac{11}{57}$.

2. Le professeur fait effectuer 3 exercices successivement au tableau.

   À chaque exercice, il effectue un tirage au sort parmi l'intégralité de la classe pour désigner l'élève qui résout l'exercice (un même élève peut donc se retrouver plusieurs fois au tableau).

a. Pour chaque tirage au sort, montrer que la probabilité (appelée P_F) qu'une fille soit tirée au sort est de $\dfrac{3}{5}$ et que la probabilité (appelée P_G) qu'un garçon soit tiré au sort est de $\dfrac{2}{5}$.

b. À partir de ces résultats, montrer que la probabilité pour qu'une seule fille et deux garçons soient tirés au sort sur les 3 tirages successifs est de $\dfrac{36}{125}$ (la méthode est laissée au choix du candidat).

3. Soit P_A la probabilité qu'un évènement A se produise et P_B la probabilité qu'un évènement B se produise. On a $P_A = 0,6$; $P_B = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,8$.

a. Déterminer $P(A \cap B)$.

b. Déterminer la probabilité de « A sachant B » notée $P(A/B)$.

Exercice n^o^ 3 :

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est x, exprimé en centaines d'euros.

1. D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout $x > 0$ comme :

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{15}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x - 1}.$$

a. Déterminer l'unique solution exacte (ni arrondie, ni encadrée) de l'équation $f(x) = g(x)$.

On appelle cette solution le « prix d'équilibre », c'est-à-dire le prix en centaines d'euros qui permet l'égalité entre l'offre et la demande.

b. À partir de la solution trouvée précédemment, déterminer l'offre, exprimée en nombre d'objets, au prix d'équilibre.

c. En admettant que $\ln(8) = 2,08$, quel est le chiffre d'affaires généré par les ventes au prix d'équilibre ?

2. Soit la fonction $h(x)$ définie par $h(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

a. Déterminer la dérivée $h'(x)$ de la fonction $h(x)$.

b. En déduire une primitive $K(x)$ de la fonction $k(x)$ définie par :

$$k(x) = -\frac{4x-3}{\left(2x^2-3x+4\right)^2}.$$