∽ Contrôleur des douanes : surveillance 2017 ∾

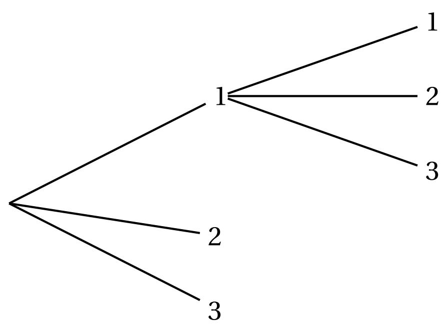
OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice n° 1

Une urne contient trois boules non identifiables au toucher, numérotées respectivement 1, 2 et 3.
Le jeu proposé est le suivant :
Le joueur paye d'abord 10 €, puis effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise.
On admet que tous les tirages sont équiprobables. On note dans l'ordre les trois chiffres tirés.
Si ces trois chiffres sont identiques, le joueur reçoit 25 €.
Si ces trois chiffres sont tous différents, il reçoit 15 €.
Si la somme de ces trois chiffres vaut 7, il reçoit 13 €.
Dans tous les autres cas, il ne reçoit rien.

1. En s'aidant d'un arbre comme ci-dessous, donner la liste des 27 tirages possibles.



2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque combinaison de trois chiffres obtenue, associe le gain algébrique (c'est-à-dire la différence : somme reçue moins le versement initial).
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

Exercice n° 2

1. Une ville A possède 200 000 habitants au 1^er^ janvier 2017. On considère que cette population diminue de 2 % par an.
   On note u_n le nombre d'habitants de la ville A au 1^er^ janvier de l'année $2017 + n$, où n est un entier naturel. Ainsi $u_0 = 200\,000$.
   a. Calculer u_1 et u_2
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c. En déduire la nature de la fonction (u_n) puis l'expression de u_n en fonction de n.
   d. Déterminer l'arrondi de u_{10}.

2. Une ville B possède 120 000 habitants au 1er janvier 2017.

   On note v_n le nombre d'habitants de la ville B au 1er janvier $2017+n$, où n est un entier naturel. Ainsi $v_0 = 120\,000$.

   On considère que pour tout entier naturel n, $v_n = 120\,000 \times 1,01^n$.

   a. Calculer le nombre d'habitants au 1er janvier 2019.

   b. Déterminer l'arrondi de v_{10}.

3. En quelle année la population de la ville B deviendra-t-elle supérieure à celle de la ville A ?

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} + x + 2$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D.

2. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 3 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}\right)$.

   En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$.

   b. Vérifier que $f'(x) = \left(2\,\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ puis déterminer le signe de $f'(x)$.

   d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   Que peut-on dire des droites T et D ?

   b. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ les droites D, T et la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln(3)$.