∽ Contrôleur des douanes : surveillance 2016 ∾

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice n° 1

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1~;~2~;~3~;~4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 , dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$, démontrez que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont indépendants.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. Soit n un entier naturel non nul.
   On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   a. Montrez que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   b. Calculez $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudiez la convergence de la suite (S_n).

Exercice n° 2

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2}\ \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculez u_2 et déduisez-en que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   a. Calculez v_0.
   b. Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n.
   c. Déduisez-en que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   Exprimez v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a. Calculez w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimez w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. Déduisez-en que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimez w_n en fonction de n.

4. Montrez que pour tout entier naturel n;, $\quad u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice n° 3

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudiez le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

b. Calculez $\varphi(\text{e})$.

Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

(On rappelle que $\text{e} \approx 2,718$).

c. Déterminez le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

a. Calculez $f'(x)$ et montrez que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

b. Déduisez de la question 1 le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

c. Démontrez que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$, on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

d. Déduisez-en $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice n° 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(3~;0~;6)$ et I$(0~;0~;6)$ et on appelle (D) la droite passant par A et I.
On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1. Démontrez que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2. Démontrez que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).

3. Démontrez que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$ et déterminez les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$.

4. Démontrez qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{AC}}$ est $x+4y+2z-12=0$.