

# ∞ Contrôleur des douanes : surveillance 2019 ∞

## OPTION A : MATHÉMATIQUES

### Remarque préliminaire :

Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

### Exercice n° 1

#### Partie A :

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  et en déduire son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$
3. En déduire que pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $e^x - x > 0$ .

#### Partie B :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 1]$  par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

On admet que  $f$  est strictement croissante sur  $[0 ; 1]$ .

Soit  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère

1. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) \in [0 ; 1]$ .
2. Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = x$ .
  - a. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ .
  - b. Étudier la position relative de la droite  $(D)$  et de la courbe  $\mathcal{C}$  sur  $[0 ; 1]$ .
3.
  - a. Déterminer une primitive de  $f$  sur  $[0 ; 1]$ .
  - b. Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan déterminé par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

### Exercice n° 2

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \frac{2u_n}{2 + 3u_n} \end{cases}$$

1.
  - a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
  - b. La suite  $(u_n)$  est elle arithmétique? Géométrique?
2. On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  n'est pas nul et on pose  $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$ .

- a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
- b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  puis déduire  $u_n$  en fonction de  $n$
- c. Vers quel nombre tend la suite  $(u_n)$ .

**Exercice n° 3**

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Il n'est pas demandé de faire de figure.

On considère quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A(-1; 2; 1), \quad B(1; 6; -1), \quad C(2; 2; 2), \quad I(0; 1; -1)$$

1. Calculer les coordonnées de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .  
Justifier que les trois points A, B et C définissent un plan  $P$ .
2. Soit  $\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $(1; 1; -3)$ .  
Démontrer que  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .  
Déterminer une équation cartésienne du plan  $P$ .

**Exercice n° 4**

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15.

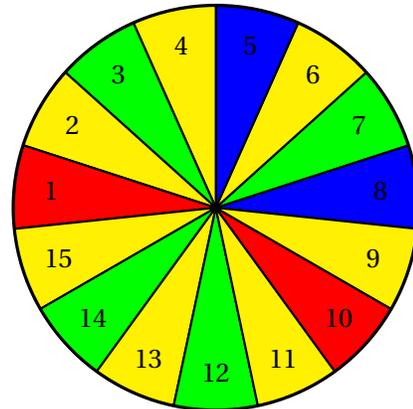
Ces secteurs sont de différentes couleurs :

- secteurs 1 et 10 rouges;
- secteurs 2, 4, 6, 9, 11, 13 et 15 jaunes;
- secteurs 5 et 8 bleus;
- secteurs 3, 7, 12 et 14 verts).

On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.

L'ensemble des éventualités est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}.$$



1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
  - a.  $E$  « le numéro est multiple de 5 »
  - b.  $F$  « le numéro n'est pas multiple de 5 »
  - c.  $G$  « le numéro est pair et inférieur à 11 »
  - d.  $E \cap G; E \cup G$ .
2. Les secteurs 1 et 10 sont de couleur rouge. Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue. Les secteurs 3, 7, 12 et 14 sont de couleur verte. Les autres secteurs sont de couleur jaune.  
La variable aléatoire  $X$ , qui associe à la couleur bleue le nombre 100, à la couleur rouge le nombre 30, à la couleur verte le nombre 10 et à la couleur jaune le nombre 0, correspond au gain du joueur en euros.
  - a. Donner la loi de probabilité de  $X$ .
  - b. Calculer l'espérance mathématique de  $X$  et interpréter le résultat.

3. Deux observateurs A et B sont un peu éloignés de la roue. Ils voient la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête mais ne peuvent pas distinguer les numéros.

B connaît la correspondance entre les numéros et les couleurs des différents secteurs et indique à A sur quel numéro il doit parier.

Évaluer dans chacun des cas suivants la probabilité pour A de gagner :

- a. La roue s'arrête sur un secteur rouge et A parie que le numéro est 15.
- b. La roue s'arrête sur un secteur vert et A parie que le numéro est 3.
- c. La roue s'arrête sur un secteur bleu et A parie que le numéro est 8.
- d. La roue s'arrête sur un secteur jaune et A parie que le numéro n'est pas 14.