

∞ Contrôleur des douanes : surveillance 2019 ∞

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire :

Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

Exercice n° 1

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction g et en déduire son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

Soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe \mathcal{C} sur $[0 ; 1]$.
3.
 - a. Déterminer une primitive de f sur $[0 ; 1]$.
 - b. Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan déterminé par la courbe \mathcal{C} , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \frac{2u_n}{2 + 3u_n} \end{cases}$$

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. La suite (u_n) est elle arithmétique? Géométrique?
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas nul et on pose $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$.

- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
- Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n
- Vers quel nombre tend la suite (u_n) .

Exercice n° 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

On considère quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A(-1; 2; 1), \quad B(1; 6; -1), \quad C(2; 2; 2), \quad I(0; 1; -1)$$

- Calculer les coordonnées de \vec{AB} et \vec{AC} .
Justifier que les trois points A, B et C définissent un plan P .
- Soit \vec{u} le vecteur de coordonnées $(1; 1; -3)$.
Démontrer que \vec{u} est orthogonal à \vec{AB} et \vec{AC} .
Déterminer une équation cartésienne du plan P .

Exercice n° 4

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15.

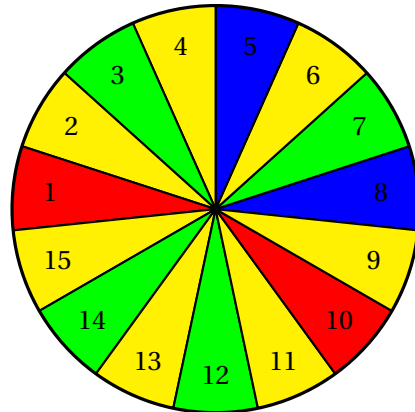
Ces secteurs sont de différentes couleurs :

- secteurs 1 et 10 rouges;
- secteurs 2, 4, 6, 9, 11, 13 et 15 jaunes;
- secteurs 5 et 8 bleus;
- secteurs 3, 7, 12 et 14 verts).

On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.

L'ensemble des éventualités est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}.$$



- Déterminer la probabilité des événements suivants :
 - E « le numéro est multiple de 5 »
 - F « le numéro n'est pas multiple de 5 »
 - G « le numéro est pair et inférieur à 11 »
 - $E \cap G; E \cup G$.
- Les secteurs 1 et 10 sont de couleur rouge. Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue. Les secteurs 3, 7, 12 et 14 sont de couleur verte. Les autres secteurs sont de couleur jaune.
La variable aléatoire X , qui associe à la couleur bleue le nombre 100, à la couleur rouge le nombre 30, à la couleur verte le nombre 10 et à la couleur jaune le nombre 0, correspond au gain du joueur en euros.
 - Donner la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

3. Deux observateurs A et B sont un peu éloignés de la roue. Ils voient la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête mais ne peuvent pas distinguer les numéros.

B connaît la correspondance entre les numéros et les couleurs des différents secteurs et indique à A sur quel numéro il doit parier.

Évaluer dans chacun des cas suivants la probabilité pour A de gagner :

- a. La roue s'arrête sur un secteur rouge et A parie que le numéro est 15.
- b. La roue s'arrête sur un secteur vert et A parie que le numéro est 3.
- c. La roue s'arrête sur un secteur bleu et A parie que le numéro est 8.
- d. La roue s'arrête sur un secteur jaune et A parie que le numéro n'est pas 14.