Contrôleur des douanes : surveillance février 2015

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire : Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice nº 1

Une association sportive louant des terrains de tennis s'interroge sur la rentabilité de ses terrains.
Sachant que la location d'un terrain dure une heure, l'association a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine).
Dans le cadre de cette répartition, 80 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur plusieurs semaines lui a permis de s'apercevoir que :

- Lorsque l'heure est creuse, 30 % des terrains sont occupés ;
- Lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain au hasard.
On notera les évènements :

- C : « l'heure est creuse » ;
- T : « le terrain est occupé ».

1. Représentez cette situation par un arbre de probabilités pondéré.
2. Calculez $p(T \cap C)$;
3. Déterminez la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Déterminez la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, et donnez le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, l'association a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 12 € pour une heure pleine ;
- 5 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location horaire d'un terrain choisi au hasard.

5. Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?
   Construisez le tableau décrivant la loi de probabilité de X.
6. Déterminez l'espérance mathématique de X. Interprétez ce résultat.
7. Sachant que l'association dispose de 12 terrains et est ouverte 60 heures par semaine, quelle est sa recette hebdomadaire moyenne ?

Exercice nº 2

Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.

Pendant ces 5 minutes, les messages arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps.
Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers de messages par minute, est donné par la fonction f telle que :

$$\left\{\begin{array}{l c l l l}f(x) &=& -4x^2+8x & \text{pour} & x \in [0\,;\,1]\\ f(x) &=& \ln x - x + 5 & \text{pour} & x \in [1\,;\,5]\end{array}\right.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
On veut calculer le nombre total de messages reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre de messages est donné par :

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrez que f est croissante sur $[0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,5]$.
2. Donnez une primitive F de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.
3. Calculez la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
4. Soient g et G les fonctions définies sur $[1\,;\,5]$ par

   $$g(x) = \ln x \quad \text{et} \quad G(x) = x\ln x - x,$$

   montrez que G est une primitive de g sur $[1\,;\,5]$.
5. Calculez la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
6. Donnez le nombre total de messages reçus pendant ces 5 minutes, arrondi à l'unité.
   À titre indicatif, on précise que $\ln 5 \approx 1{,}609\,44$.
7. Calculez la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0\,;\;5]$.
   Donnez la valeur exacte, puis arrondie au millième. Interprétez ce résultat.

Exercice n° 3

On considère (u_n) et (v_n),deux suites définies par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6$$

1. La suite (v_n) est-elle une suite arithmétique ou géométrique ?
   Justifiez votre réponse et précisez quelle est la raison de cette suite.
2. Exprimez $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, puis $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.
3. Déterminez les limites de (S_n) et $\left(S'_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (w_n) par $w_n = \ln(v_n)$.

4. Montrez que (w_n) est une suite arithmétique et précisez sa raison.
5. Exprimez $S''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ en fonction de n, puis calculer la limite de $\left(S''_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

6. Calculez le produit $P_n = v_0 v_1 \dots v_n$ en fonction de n.
   Déduisez-en la limite de (P_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 4

Deux amis, Marc et Alexandre, discutent :
Marc : « *Si on lance trois pièces de monnaie en l'air en même temps, quelle est la probabilité pour qu'elles retombent toutes sur le même côté, c'est-à-dire toutes les trois du côté PILE ou toutes les trois du côté FACE ?* ».
Alexandre : « *Comme les pièces n'ont que deux faces, sur les trois pièces lancées, il y en aura forcément au moins deux qui retomberont du même côté, c'est-à-dire qu'il y aura automatiquement, et au minimum, deux pièces côté PILE ou deux pièces côté FACE.*
Il reste donc une chance sur deux pour que la troisième pièce tombe à son tour sur ce même côté. La réponse à ta question est donc $1/2$ ».
Que pensez-vous du raisonnement et de la réponse d'Alexandre ? Argumentez votre position.