Corol'aire

Janvier 2023 n° 131

Une décision saugrenue

Frédéric de Ligt

Le niveau des élèves français en mathématiques est en baisse inquiétante. C'est désormais un fait objectif, admis même par ceux qui étaient, il n'y a pas si longtemps, dans le déni. Comment ce grand pays de mathématiciens a-t-il pu laisser la situation se dégrader au point de se trouver relégué à la dernière place des pays européens (TIMMS 2019) ? L'enquête CEDRE confirme cette chute. Que n'a-ton entendu lors des premières évaluations internationales PISA pour rejeter les conclusions de ces études : les questions étaient formatées sur le modèle anglo-saxon et donc difficiles pour nos élèves, les autres pays avaient préparé leurs élèves à ce genre de questionnaire… Les écarts se sont creusés entre les élèves issus des différentes catégories sociales. Les enfants appartenant à des milieux défavorisés ont vu leur niveau scolaire baisser et leur nombre augmenter tandis que ceux appartenant à des milieux favorisés ont vu leur nombre se réduire sans que par ailleurs leurs performances aient augmenté. La situation étant désormais admise par les pouvoirs publics, et sous la pression de l'opinion, le nouveau ministre de l'Éducation Nationale a décidé d'apporter sa contribution au redressement de la situation.

(*suite page suivante*)

Sommaire

L'annonce faite par lui il y a peu laisse pantois. Il est proposé, sur la base du volontariat, aux professeurs des écoles d'intervenir pour une remédiation en mathématiques (et en français) une heure par semaine dans les collèges. Les acteurs de terrain se demandent comment une telle décision a pu être suggérée puis validée par le cabinet du ministre. Cette action est vouée à l'échec dès sa mise en place. Les professeurs des écoles n'ont pas le temps matériel pour ce surcroit de travail, même rémunéré, ont des difficultés à être remplacés dans leurs classes, et ils n'ont sans doute pas envie de se substituer au spécialiste de la discipline, à savoir le professeur de mathématiques, sur son lieu d'exercice. Outre la difficulté de trouver des personnes du primaire susceptibles d'assurer cette remédiation, il y a plus fondamentalement un problème de logique dans cette décision. Un vieil adage dit qu'il vaut mieux prévenir que guérir. Pourquoi ce soutien n'est-il pas placé dès l'école primaire, là où il aurait une chance d'être efficace ? Et pourquoi ne pas réintroduire en plus du soutien en sixième, dispensé par un collègue de mathématiques ? Cette décision incohérente ressemble à un effet d'annonce pour calmer l'opinion, et faire croire que le problème a été pris en compte et va être traité. Encore et toujours de la communication !

Rallye mathématique de Poitou-Charentes

L'équipe du Rallye en forme olympique !

En ce début d'année 2023, l'équipe du Rallye a repris du service... pour l'édition 2024.
Une première réunion en visio nous a permis de définir les orientations de notre prochaine épreuve. En cette année olympique, nous souhaitons allier maths et sports. Beaucoup d'idées ont fusé de toutes parts ! Il va falloir structurer toutes ces propositions. Pour la partie thème, il faut rendre cohérentes les questions posées, pas facile de trouver un consensus ! Pour la partie problème, il va être difficile de choisir tant les sujets sont diversifiés. Il faudra en sélectionner 21 de niveau échelonné du CM à la seconde.
Mais l'équipe est prête à relever le défi !
Les affiches « Maths et nature » de l'édition 2022 ont donné lieu à un concours lors des Journées Nationales de l'APMEP à Jonzac. Nous ne pouvons malheureusement plus récompenser les classes lauréates. En effet, les élèves sont aujourd'hui répartis dans d'autres classes, voire d'autres établissements. Cependant, nous envisageons d'utiliser ces affiches pour les lots de la prochaine édition...
La prochaine réunion aura lieu en présentiel le mercredi 1er mars à Poitiers.

Comité de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Le Comité de la Régionale s'est réuni le mercredi 14 décembre 2022

Élection du nouveau bureau

Suite à l'Assemblée Générale de l'Association du 23 octobre 2022, l'ancien bureau est reconduit, à l'exception de Corinne Parcelier qui a choisi de ne pas se représenter à la vice-présidence, après un vote à l'unanimité des membres du Comité présents à la réunion.

Le bureau
Président : Frédéric de Ligt
Vice-Président : Philippe Rogeon
Trésorier : Jean-Marie Parnaudeau
Trésorier adjoint : Jacques Germain
Secrétaire : Thierry Bacle

Modification des statuts

Le comité adopte à l'unanimité la modification des statuts de la Régionale.

Bilan des Journées Nationales à Jonzac 2022

Corinne Parcelier a présenté le bilan financier provisoire des Journées Nationales d'octobre dernier. Lorsque toutes les factures auront été acquittées, journée off comprise, les recettes excéderont les dépenses et donc la Régionale n'aura pas eu besoin de puiser dans son fond de réserve. Il y a eu environ 500 inscriptions payantes. Afin de permettre aux Régionales de Rennes et du Havre de pourvoir à leurs premières dépenses, un chèque sera remis aux représentants de chacune d'elles lors de la réunion de préparation des futures Journées Nationales qui se déroulera à Paris en janvier où Corinne Parcelier et Frédéric de Ligt seront présents. La subvention attribuée aux Journées à l'occasion de la Fête de la Science n'est toujours pas versée. Il faut relancer, à l'EMF, la personne qui s'en occupe. Le prix modeste du repas facturé par le lycée a permis de rémunérer très convenablement le personnel qui a assuré le service ainsi que l'entretien des locaux sans que cela ne grève notre budget. Au stand de l'APMEP, les brochures se sont très bien vendues. Enfin le banquet est un peu déficitaire car la Régionale avait invité une dizaine de personnes pour les remercier de leur participation.

Quant au déroulement des Journées, l'organisation a été satisfaisante. Tous les participants ont pu se loger et se restaurer ; toutes les conférences et spectacles ont eu lieu et ont donné satisfaction aux congressistes. Les retours, donnés entre autres par la responsable de l'office du tourisme et les exposants, ont été très positifs. Si l'on doit pointer les soucis qui se sont présentés, il y a eu un cafouillage lors de l'attribution des chambres de l'internat car il n'avait pas été possible d'attribuer un numéro de chambre à chacun à partir du site et le problème de la salle de permanence du lycée dont la décoration par des anamorphoses n'a pas pu être achevée faute de temps. La Régionale compte 22 adhérents supplémentaires à l'issue de ces Journées Nationales. Un message de bienvenue leur a été adressé.

Candidature nationale au Comité National

Il reste des sièges à pourvoir au Comité National dans le quota des candidatures nationales. Frédéric de Ligt se propose d'envoyer une profession de foi pour poser sa candidature.

Alignement des frais de déplacement sur ceux du National

Il est proposé au comité de monter les frais de déplacement kilométrique à la hauteur de ceux pratiqués par le National. La décision est adoptée à l'unanimité par les membres présents du comité et prend effet aussitôt.

Relance du Rallye

Le thème du sport semble porteur pour le Rallye 2024 qui se déroulera un peu avant le début des JO à Paris. Une visio est programmée mercredi 11 janvier 2023 de 14 h à 16 h pour en discuter plus précisément. Il faudra relancer les différentes AMOPA pour une subvention au prochain Rallye.

Relance de la Journée de la Régionale

Le lycée de Rochefort ou à défaut celui de Saintes pourrait être l'établissement hôte. Frédéric de Ligt va prendre contact avec Xavier Andrieux qui exerce au lycée Merleau Ponty à Rochefort. L'exposition sur les images, réalisée par notre Régionale en partenariat avec l'IREM&S, qui sera visible à l'EMF à partir de septembre 2023, suggère au Comité l'idée de proposer une conférence sur ce thème lors de la Journée de la Régionale. Le nom de Laurent Signac, qui est un membre de l'IREM&S, est évoqué pour une conférence sur les images numériques.

Corol'aire

Le prochain Corol'aire est programmé pour fin janvier. Jean Fromentin se propose de reprendre la mise en page du numéro pour soulager Sébastien Dassule qui est en surcharge de travail ces derniers temps. Dominique Gaud va proposer un petit article pour présenter un pôle de l'exposition en préparation.

Exposition

Il a été proposé par l'EMF qu'un membre du comité de la Régionale, membre aussi de l'IREM&S, soit présent au conseil d'administration de l'EMF. La décision est approuvée et Dominique Gaud est désigné par le Comité. La prochaine exposition bénéficie de la part de l'EMF d'un budget suffisant et la Régionale n'aura pas besoin d'y participer financièrement. Il faudra réfléchir au matériel qui circulera dans la version itinérante de telle sorte qu'il soit transportable dans un véhicule ordinaire. Jean-Marie Parnaudeau rappelle que les expositions tournent bien dans l'académie et sont une source de financement non négligeable pour la Régionale.

Prochain comité

La date du prochain Comité est fixée au mercredi 22 février.

L'ordre du jour étant épuisé, la séance est levée à 17 h 15.

Pierre-Jean Robin nous a quittés bien trop tôt à 67 ans

Vendredi 30 décembre 2022 - 12 h 40
Je t'annonce une bien triste nouvelle : Pierre-Jean est décédé ce matin.
Catherine

Sa maladie a eu raison de son moral, un moral d'acier qu'il avait, appliquant à la lettre son traitement malgré des moments difficiles, et une confiance inébranlable envers les médecins qui le soignaient. Il nous suivait, nous encourageait dans l'organisation de nos Journées Nationales à Jonzac et a tenu à venir nous y retrouver. Ainsi, c'était son adieu à l'APMEP régionale et nationale.
Du côté professionnel, faisant fi de la hiérarchie administrative ou pédagogique, Pierre-Jean intervenait avec son franc-parler enrobé d'humour pour défendre un enseignement des mathématiques accessible à tous.
Du côté associatif, il a rejoint le Comité national de l'APMEP en 2011 et le Comité régional la même année, participant activement avec toute la franchise qu'on lui connaît.

Adieu Pierre-Jean, mais ta bonne humeur restera encore longtemps présente dans nos réunions et dans nos esprits.

Pierre-Jean : un militant, avec l'humain pour valeur suprême.

Les stages au Lycée de la Venise verte avec un accueil toujours au top, toujours prêt à donner un coup de main, à rendre service. Des liaisons lycée-collèges en maths pour essayer de faire que tout le monde avance. Du soutien aux initiatives pour faire travailler ensemble professeurs de maths et professeurs des écoles : repas avec des responsables à Angoulême, atelier de la Régionale pour le cycle 3 avec achat de brochures IREM pour les donner à des professeurs des écoles motivés mais hésitants... Donner sans compter, sans calculer, sans tenir compte de la hiérarchie, du rang ou des diplômes. Un discours franc, loyal, provocateur.
Une volonté de convaincre pour faire de nouveaux adhérents à l'APMEP, un investissement sans faille au Comité régional et au Comité national. Un plaisir de covoiturer avec Pierre-Jean, et de boire une bière au café de la Porte du Marais d'Epannes avant de se quitter. Le regret de n'avoir pas pu rentrer dans l'église d'Usseau le samedi 7 janvier pour entendre les témoignages de tous ces gens venus en nombre lui rendre hommage. Le regret que n'ait pu se réaliser un projet que nous avions conçu et qui lui tenait à cœur.

Jean-Paul Guichard

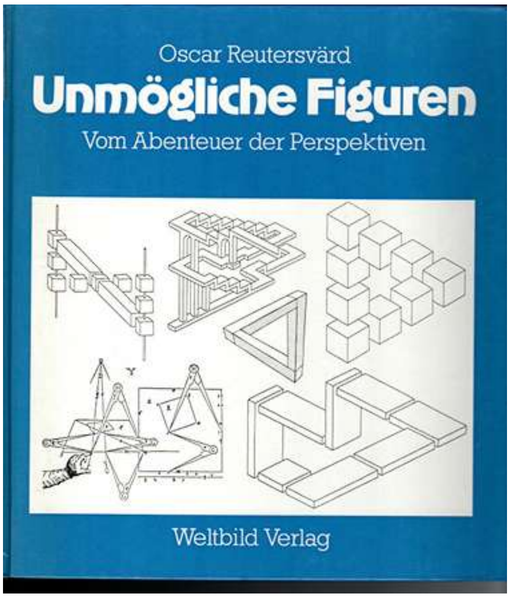
Expositions

Nos expositions circulent

Pendant le mois de janvier, l'exposition Maths & Puzzles grand format d'EMF était à Carbon Blanc (https://www.sudouest.fr/gironde/carbon-blanc/carbon-blanc-maths-et-puzzles-une-exposition-originale-pour-apprendre-en-s-amusant-bientot-a-la-mediatheque-13500927.php).
Maths & Mesures était à Chamalières (https://www.lamontagne.fr/chamalieres-63400/actualites/quand-les-maths-ont-un-sens_14249123/).
Nos réalisations sont appréciées comme en témoignent les articles en liens.

Pendant ce temps-là, nos expositions petit format de la Régionale ont aussi circulé. De nombreux collèges louent les expos et font venir les élèves des écoles primaires de leur secteur. Les témoignages des uns et des autres seront les bienvenus.
Et nous continuons à faire la promotion des mathématiques en attaquant la phase finale de la conception de la nouvelle exposition : **Maths & Images**, qui sera inaugurée à la rentrée de septembre (*article suivant*).

En préparant l'expo… Figures impossibles ?



S'il est une figure dite « impossible » connue, c'est bien le triangle de Penrose ou tri-poutre.

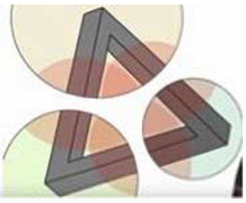
Cet « objet » a été découvert en 1934 par Oscar Reutersvärd, artiste suédois né en 1915 à Stockholm et décédé le 2 février 2002 en Suède.
Il a introduit l'art des objets dits impossibles. Il est parfois surnommé « le père de l'impossible » Le tri-poutre a été redécouvert par Roger Penrose en 1958.
Mais qu'est-ce qu'une figure impossible : *Au premier coup d'œil, une figure impossible semble représenter un objet tridimensionnel habituel, mais son examen détaillé révèle une impossibilité : aucune interprétation du dessin entier ne semble concevable. La figure impossible tend un piège à notre système visuel*

Zenon Kulpa [1] propose la définition suivante d'une figure impossible : « L'image d'un objet impossible est une figure plate qui donne l'impression d'être un objet à trois dimensions, alors que cette figure ne peut exister telle que nous l'interprétons dans l'espace, c'est-à-dire que si nous essayons de la construire nous nous trouverons devant des contradictions spatiales clairement visibles pour l'observateur ».

Zenon Kulpa, infinity 1977 —>

[1] Zenon Kulpa est un informaticien polonais né en 1946. On trouve quelques œuvres à l'adresse : https://im-possible.info/english/art/various/zenon-kulpa.html

En somme, devant une figure impossible, l'esprit est saisi par une interprétation paradoxale de l'espace : le vrai et le faux, la plausibilité et la contradiction, sont simultanément ressentis et provoquent un très bref vertige intellectuel

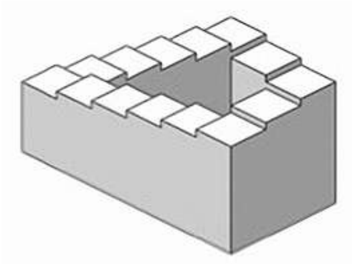


Ce qui peut paraître troublant, c'est que le tri-poutre est formé de 3 parties qui ne présentent aucun paradoxe[2].

Mais pourquoi est-il alors impossible ? Cela s'explique mathématiquement comme Basile Pillet le montre dans cette vidéo https://www.youtube.com/watch?v=PluJtnq1Wfo

Roger Penrose né en 1931 est bien plus connu pour sa découverte des pavages non périodiques (en 1974) et ses contributions à la cosmologie avec ses travaux avec Stephen Hawking, que pour le tri-poutre

Son fils Lionel créera l'escalier en perpétuelle montée (ou descente !) qui sera une source d'inspiration d'Escher qui a travaillé de nombreuses années avec le mathématicien anglais Coxeter (1907-2003).



Montée descente (Escher) —>

Figure impossible ? Objet impossible ? Tout est une histoire de point de vue.

Sculpture au Deutsches Technikmuseum Berlin (2008).

On remarque l'encoche qui permet de reconstituer virtuellement un triangle de Penrose sous un angle de vue précis.

Chacun a en mémoire la chute d'eau d'Escher. Il est pourtant possible de construire une maquette qui sous un bon point de vue permet de voir la chute d'eau.

https://www.acamus.net/index.php?option=com_content&view=article&id=63:des-objets-impossibles&catid=42&Itemid=220

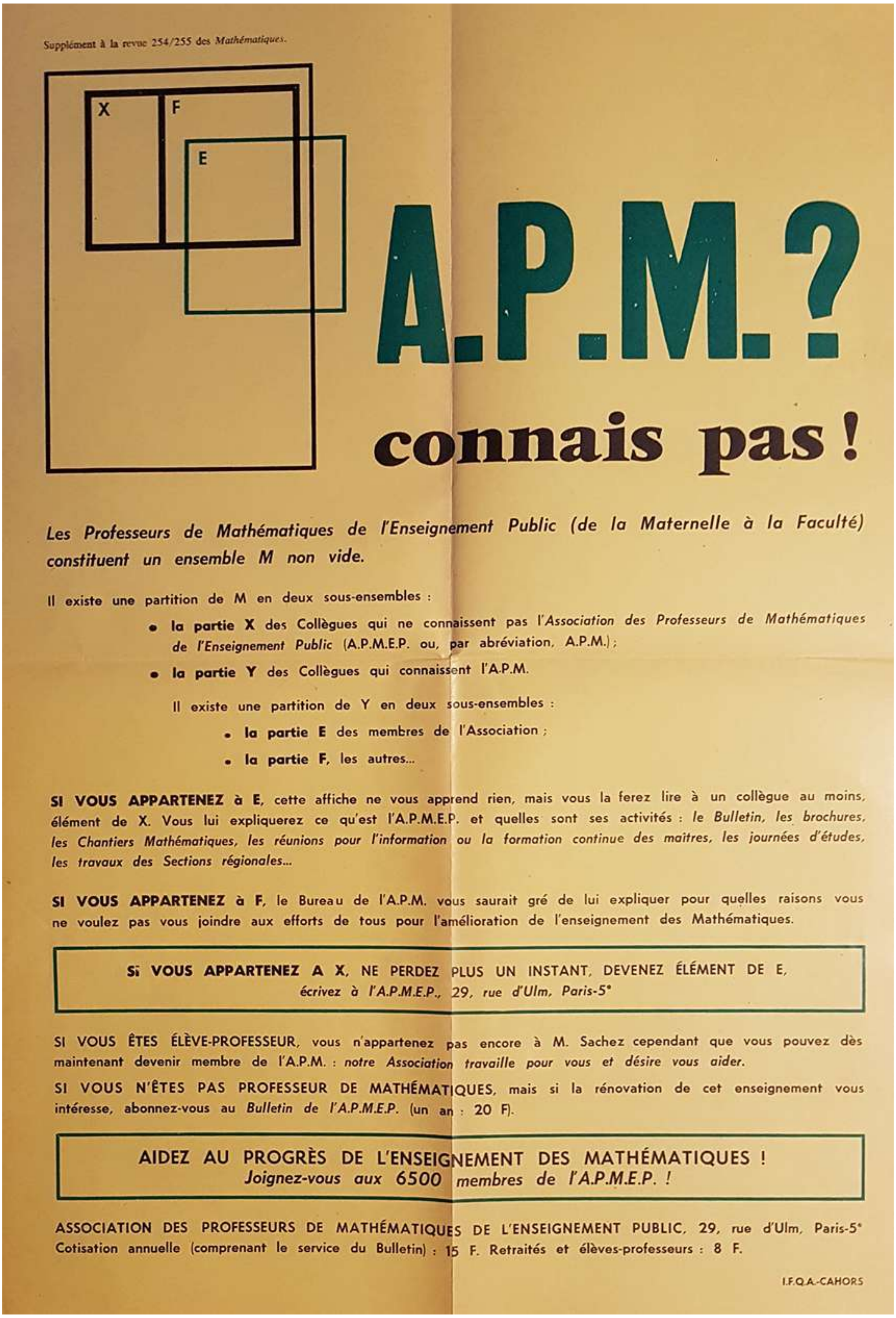
Mathématiques et arts encore une fois s'entremêlent dans cette nouvelle exposition. Des objets déroutants et des images perturbantes seront présentés, entre autres, lors de cette exposition.
Mais au-delà nous abordons un sujet beaucoup plus important dans notre société actuelle intoxiquée par les infox : peut-on croire ce que l'on voit ? Voit-on ce que l'on croit ?

Dominique Gaud

[2] Les férus de mathématiques peuvent consulter https://www.youtube.com/watch?v=PIuJtnq1Wfo

Dans nos archives !

Dans le numéro double 254-255 du ***bulletin de l'APMEP*** *de septembre-décembre 1966, était jointe une affiche destinée à être distribuée pour faire connaître l'APMEP et recueillir des adhésions à l'association, à une époque où pointaient les « Maths Modernes ».*



Supplément à la revue 254/255 des *Mathématiques*.

X F E

A.P.M. ?

connais pas !

Les Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (de la Maternelle à la Faculté) constituent un ensemble M non vide.

Il existe une partition de M en deux sous-ensembles :

- **la partie X** des Collègues qui ne connaissent pas l'*Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (A.P.M.E.P. ou, par abréviation, A.P.M.) ;
- **la partie Y** des Collègues qui connaissent l'A.P.M.

  Il existe une partition de Y en deux sous-ensembles :

  - **la partie E** des membres de l'Association ;
  - **la partie F**, les autres...

SI VOUS APPARTENEZ à E, cette affiche ne vous apprend rien, mais vous la ferez lire à un collègue au moins, élément de X. Vous lui expliquerez ce qu'est l'A.P.M.E.P. et quelles sont ses activités : *le Bulletin, les brochures, les Chantiers Mathématiques, les réunions pour l'information ou la formation continue des maîtres, les journées d'études, les travaux des Sections régionales...*

SI VOUS APPARTENEZ à F, le Bureau de l'A.P.M. vous saurait gré de lui expliquer pour quelles raisons vous ne voulez pas vous joindre aux efforts de tous pour l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques.

SI VOUS APPARTENEZ A X, NE PERDEZ PLUS UN INSTANT, DEVENEZ ÉLÉMENT DE E,
écrivez à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5e

SI VOUS ÊTES ÉLÈVE-PROFESSEUR, vous n'appartenez pas encore à M. Sachez cependant que vous pouvez dès maintenant devenir membre de l'A.P.M. : *notre Association travaille pour vous et désire vous aider.*

SI VOUS N'ÊTES PAS PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES, mais si la rénovation de cet enseignement vous intéresse, abonnez-vous au *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* (un an : 20 F).

AIDEZ AU PROGRÈS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !
Joignez-vous aux 6500 membres de l'A.P.M.E.P. !

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC, 29, rue d'Ulm, Paris-5e
Cotisation annuelle (comprenant le service du Bulletin) : 15 F. Retraités et élèves-professeurs : 8 F.

I.F.Q.A.-CAHORS

Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

131-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que quel que soit la disposition des quinze billes de billard américain dans le triangle ci-contre, il y a toujours deux billes portant un numéro pair qui sont en contact.

131-2 *proposé par Daniel Perrin (Orsay)* :

La maîtresse et les fractions

Madame Hortense Aignante, maîtresse du cours moyen de l'école des Aiguilles à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne) a donné un exercice sur les fractions à ses élèves. Le pourcentage de réussite a été de 47,82% (valeur arrondie par défaut). Sachant que les classes de Saint-Tricotin ne sont pas surchargées (et qu'elles ont en tous cas moins de 30 élèves), dire combien la classe comporte d'élèves et combien ont réussi l'exercice.

131-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Si des points du plan, en quantité infinie, sont tous situés à des distances mutuelles mesurées par des nombres entiers alors ils sont nécessairement tous alignés.

131-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Soit ABC un triangle équilatéral et G son centre de gravité. D est un point du côté [AB] tel que AD = AG. La droite (DG) coupe le côté [AC] en E et la droite (BC) en F. Montrer que E est le milieu du segment [DF].

Des solutions

127-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Montrer que la série suivante converge vers une limite à déterminer :

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2+3}+\frac{3}{4+5+6}+\frac{4}{7+8+9+10}+\cdots$$

Solution de Walter Mesnier

Je trouve que la série converge, puisque le terme général s'écrit après quelques efforts $2/(n^2+1)$. Pour la limite, il faut passer au niveau supérieur ; Fourier et Dirichlet nous donnent $\pi/\tanh(\pi) - 1 \approx 2{,}1533$.

N.d.l.r : L'expression du terme général de la série donnée par Walter est juste. Quant à son expression de la limite de la série, elle est exacte et la méthode pour y parvenir tout autant. Mais il manque cependant quelques détails de calculs pour convaincre le lecteur. La solution de Jacques Chayé complète la première partie.

Solution de Jacques Chayé

Désignons par u_n le dénominateur du $n^{\text{ième}}$ terme de la série. Pour tout entier n > 1, u_n est la somme de n entiers naturels consécutifs, le $n^{\text{ième}}$ étant le $(1 + 2 + \ldots + n)^{\text{ième}}$ entier naturel non nul. Ce $n^{\text{ième}}$ terme de u_n est donc égal à : $n(n + 1)/2$. De même, le dernier terme de u_{n-1}, c'est-à-dire le $(n-1)^{\text{ième}}$, est égal à : $(n-1)n/2$. Par conséquent on a :

$$u_n=\frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)}{2}-\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2}$$

Soit après simplifications, $u_n = n(n^2 + 1)/2$. Notons que ce résultat est encore valable pour $n = 1$. Le terme général de la série est donc égal à $n/u_n = 2/(n^2 + 1)$. La série à termes positifs est majorée par $\int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2+1}dx$. Or, cette intégrale convergente est égale π. La série est donc convergente.

Solution de Louis Rivoallan

N.d.l.r : Louis Rivoallan parvient comme Jacques Chayé à l'expression du terme général de la série, à savoir $2/(n^2 + 1)$. Je ne retranscris pas cette partie de son courrier pour éviter les redites. En revanche il conclue à la convergence de la série en majorant le terme général par $2/n^2$ et rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Voici maintenant sa conclusion.

$$\frac{2}{n^2+1}=\frac{2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{2}{n^2}(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\ldots)$$ et donc $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+1}=2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2})-2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4})+2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6})\ldots$$

Or $(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{B_{2n}2^{n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}$ où B_{2n} sont les nombres de Bernoulli. Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_{2n}2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}$$

Solution de l'auteur

Je complète la seconde partie des résultats avancés par Walter Mesnier.

Théorème de Dirichlet

> Si f est une fonction C_1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, alors pour tout x_0 réel :
> $$\lim_{N\to+\infty} S_N(f(x_0)) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2}$$
> Avec $S_N(f(x_0)) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

On considère maintenant la fonction C_1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par : $f(x) = e^{x-2k\pi}$ si $x\in]-\pi+2k\pi\ ;\ \pi+2k\pi], k\in \text{¢}$.

On a donc : $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^t\cos(nt)dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(nt)dt$.

On calcule a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}([e^t\frac{\sin(nt)}{n}]_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^t \frac{\sin(nt)}{n}dt) = 0 - \frac{1}{\pi}([-e^t\frac{\cos(nt)}{n^2}]_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^t\frac{\cos(nt)}{n^2}dt)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left((-1)^n\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{n^2} + \frac{\pi a_n}{n^2}\right) = (-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi n^2} - \frac{a_n}{n^2} = (-1)^n\frac{2\sinh(\pi)}{\pi n^2} - \frac{a_n}{n^2}.$$

Donc $a_n = (-1)^n\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)}$ et par ailleurs, pour tout entier n on a $b_n\sin(n\pi) = 0$.

On calcule alors $S_N(f(\pi))$:

$$S_N(f(\pi)) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{2\sinh(\pi)}{\pi(n^2+1)}(-1)^n = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n^2+1}\right)$$

On applique alors le théorème de Dirichlet :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f(\pi)) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+1}\right) = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \cosh(\pi).$$

On tire finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+1} = \frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1$$

129-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Pour quels nombres entiers positifs a, b, c et d a-t-on à la fois :

ab + cd = 2719
ac + bd = 2726
ad + bc = 7066

Solution de l'auteur

On va utiliser trois égalités :

(a + c)(b + d) = 2719 + 7066 = 9785 = 5x19x103 (1)
(a + d)(b + c) = 2719 + 2726 = 5445 = 5x3^2x11^2 (2)
(b – c)(d – a) = 2726 – 2719 = 7 (3)

Avec (3)

Soit b – c = 7 et d – a = 1, alors (b + d) – (a + c) = 8 et en utilisant (1) on a :
b + d = 103 et a + c = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).

Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 82, b = 20, c = 13, d = 83.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 16, b = 86, c = 79, d = 17.

Soit b – c = 1 et d – a = 7, alors (b + d) – (a + c) = 8 et en utilisant (1) on a : b + d = 103 et a + c = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).
Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 79, b = 17, c = 16, d = 86.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 13, b = 83, c = 82, d = 20.

Soit c – b = 1 et a – d = 7, alors (a + c) – (b + d) = 8 et en utilisant (1) on a : a + c = 103 et b + d = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).
Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 86, b = 16, c = 17, d = 79.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 20, b = 82, c = 83, d = 13.

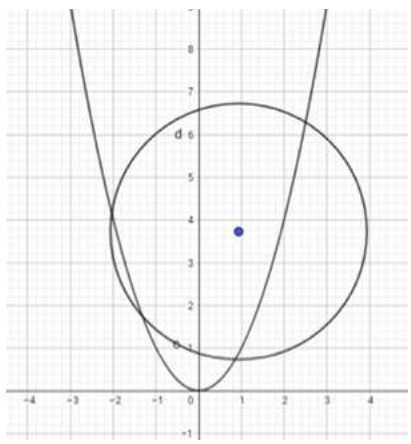
Soit c – b = 7 et a – d = 1, alors (a + c) – (b + d) = 8 et en utilisant (1) on a : a + c = 103 et b + d = 5x19 = 95. D'où a + b + c + d = 103 + 95 = 198 et ensuite on utilise (2).
Soit a + d = 5x3x11 = 165 et b + c = 3x11 = 33 et on trouve que a = 83, b = 13, c = 20, d = 82.
Soit a + d = 33 et b + c = 165 et maintenant on a : a = 17, b = 79, c = 86, d = 16.

Il y a donc 8 quadruplets qui sont solutions et qui sont présentés dans le tableau ci-dessous. On remarquera la présence de quatre quadruplets bien connus.

a	b	c	d
16	86	79	17
86	16	17	79
79	17	16	86
17	79	86	16
82	20	13	83
20	82	83	13
13	83	82	20
83	13	20	82

130-2 *proposé par Frédéric de Ligt* :

Si trois points distincts A, B et C, d'abscisses entières appartiennent à la parabole d'équation y = x^2, montrer qu'alors le cercle circonscrit au triangle ABC rencontre la parabole en un quatrième point d'abscisse entière.



Solution de Walter Mesnier

Un extrait de son courrier :

« *Je pensais avoir trouvé une solution rapide, mais je me demande si j'ai bien compris le problème ou s'il est « maladroitement » posé, je veux dire qu'on pourrait croire que le quatrième point est distinct des trois autres or ce n'est clairement pas obligatoirement le cas...* »

Une partie de ma réponse :

« *L'illustration est correcte mais, tu as raison, ma formulation est maladroite. Il aurait fallu plutôt que j'écrive : « Un cercle coupe la parabole d'équation $y = x^2$ en quatre points distincts. Si trois d'entre eux ont une abscisse entière montrer qu'alors le quatrième point a aussi une abscisse entière."* »

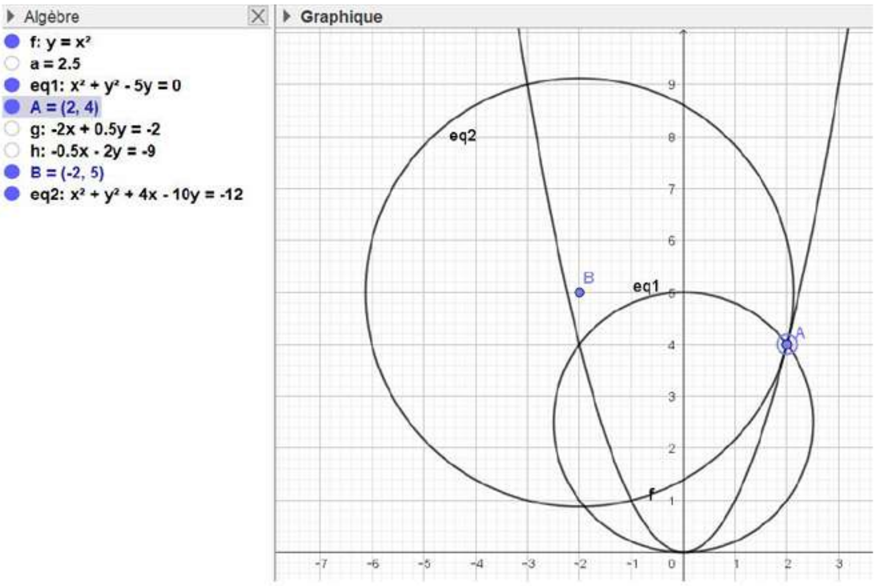
Et voici la jolie solution proposée par Walter Mesnier :

Dans ce problème de parabole, on suppose que le système admet trois solutions d'abscisses x entières et distinctes. Cela revient à dire que l'équation de degré 4 : $x^4 + (1 + b)x^2 + ax + c = 0$ a trois solutions distinctes et entières. Nommons-les n, p, q. Le théorème fondamental de l'algèbre nous permet de factoriser l'équation en :

$(x - n)(x - p)(x - q)(x - r) = 0$ avec r a priori complexe. Mais en fait le coefficient de x^3 est nul, la somme des racines est nulle, autrement dit $r = -(n + p + q)$. Ainsi r est nécessairement une somme d'entiers, donc r est entier.

Cela impliquerait que lorsque cette parabole rencontre un cercle en trois points d'abscisses entières et distinctes alors elle le rencontre en fait en quatre points d'abscisses entières. Notons toutefois que ce quatrième point pourrait très bien être confondu avec l'un des trois premiers points.

En effet il est tout à fait possible d'avoir trois points d'intersection et non quatre. Par exemple le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 5y = 0$ n'a que trois points d'intersection d'abscisses -2, 0 et 2 ou encore le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 12 = 0$ n'a que trois points d'intersection d'abscisses -2, -1 et 2.



Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. regapmep@apmep-poitoucharentes.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication F. de Ligt
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes

Comité de rédaction Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon
Siège social Voir adresse ci-dessus

Imprimerie IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)
Dépôt légal Janvier 2023