Régionale APMEP de Poitou - Charentes
APMEP

Corol'aire

Mars 2023 n° 132

Des épreuves de spécialité mathématiques en mars, et après ?

Frédéric de Ligt

Les élèves de terminale viennent de passer leurs épreuves de spécialités. Pour tenir compte du second choix de spécialité opéré, ceux qui ont conservé les mathématiques se sont répartis entre le lundi 20 mars et le mardi 21 mars. Deux sujets nationaux ont donc dû être proposés.

Une première remarque : les deux sujets n'étaient pas d'égale difficulté, le second étant un cran au-dessus du premier. Quid de l'égalité des candidats devant cette épreuve nationale ? Il faut quand même se souvenir que les épreuves ont été avancées au mois de mars afin que les notes obtenues puissent figurer dans Parcoursup.

Les épreuves viennent de s'achever, les collègues de mathématiques en lycée sont ensuite, dans leur grande majorité, mobilisés pour les corrections. Les élèves décompressent et s'ensuit une démobilisation ; les vacances de printemps approchent à grands pas. Le travail reprendra vraiment au retour des vacances. Mais quels enjeux pour ce dernier trimestre ? Tout d'abord finir la partie de programme qui n'était pas évaluable lors des épreuves, c'est-à-dire les chapitres parmi les plus difficiles : fonctions trigonométriques, calcul intégral, équations différentielles linéaires d'ordre 1, concentration, loi des grands nombres ; chapitres importants pour ceux qui envisageraient une poursuite d'études scientifiques, ce qui peut être le cas pour des élèves suivant la spécialité mathématiques en terminale. Importants, certes, il faudra quand même que les élèves s'en convainquent car les évaluations en mode continu de la fin d'année n'auront qu'un intérêt informatif.

Restera à se concentrer sur le fameux grand oral qui va être clairement chronophage. Mais pour quel résultat ? Un format imposé, complètement inadapté pour présenter un sujet scientifique.

(*suite page suivante*)

Sommaire

Rallye mathématique p.2
Comité de la Régionale ... p.3
Expositions
- Au collège Albert Camus de Frontenay R.R. p.4
- En préparant l'expo p.6
Rubricol'age p.12

Dans toutes les conférences auxquelles j'ai assisté, à tous les niveaux, l'orateur s'est toujours accompagné d'un diaporama ou d'un tableau. Il faut bien mal connaître ce domaine de la connaissance pour interdire à l'élève de projeter ou d'écrire quoi que ce soit pendant son exposé. Cet exercice a un coefficient conséquent, et les examinateurs sont ensuite bien obligés d'être très indulgents après les prestations ; les élèves ne sont pas responsables de cette situation.
Il faudrait que ces épreuves de spécialité soient replacées en juin de façon à pouvoir évaluer la totalité du programme et que le grand oral, qui n'est pas une mauvaise idée, soit adapté aux sciences en permettant soit une projection, soit la possibilité d'écrire tout en conservant la priorité à la qualité de la prestation orale.

Rallye mathématique de Poitou-Charentes

Un marque-page avec les affiches lauréates du Rallye

Dans l'édition 2022 de notre Rallye, les élèves avaient à réaliser des affiches sur le thème « Maths & Nature ». Un diaporama a présenté les plus belles de chaque niveau :
http://apmep.poitiers.free.fr/IMG/pdf/Affiches_2022.pdf
À l'occasion des Journées Nationales de l'APMEP à Jonzac en octobre 2022, quatre à cinq affiches de chaque niveau ont été soumises aux préférences des congressistes.
Voici le palmarès :

6ème B	Collège Jean Rostand - 16110 La Rochefoucauld
5ème B	Collège Léo Desaivre - 79200 Champdeniers
4ème 2	Collège Rabelais - 86000 Poitiers
3ème A	Collège Jean Rostand - 16110 La Rochefoucauld
2nde 1	Lycée Élie Vinet 16300 Barbezieux

Ces cinq affiches sont sur un marque-page recto-verso (5 x 21) dont le fichier est disponible sur le site de notre Régionale : http://apmep.poitiers.free.fr/spip.php?article350
En le découvrant vous vous rendrez vite compte qu'il faut le plier selon le trait central. Il est donc facile à réaliser.

Notre travail pour l'édition 2024 continue sur le thème « **Maths et sports** ».

Comité de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Le Comité de la Régionale s'est réuni le mercredi 8 mars 2023.

Journée de la Régionale

Lors du précédent Comité, il avait été suggéré d'organiser la Journée de la Régionale au lycée Merleau-Ponty à Rochefort. Après contact avec un enseignant du lycée, il apparaît que notre Journée pourra y avoir lieu en limitant le nombre de salles nécessaires dans la matinée. Une conférence sur le thème des images numériques est envisagée.
Les panneaux de la nouvelle exposition, s'ils sont réalisés, pourraient être exposés ainsi qu'une autre de nos expositions disponibles à la location. Un atelier sur le thème du sport aurait sa pertinence en lien avec le thème du Rallye mathématique de l'année.

Rallye

La réunion de travail prévue en présentiel le 1er mars a été reportée au mercredi 5 avril en raison du manque de disponibilité de certains membres de l'équipe à cette date. Cela n'a aucune conséquence car un travail de préparation important avait déjà été effectué et le groupe est en avance sur son calendrier habituel. Pour rappel, le thème choisi est « **Maths & Sports** » pour coller à l'actualité sportive qui suivra. Les AMOPA de la Charente-Maritime et de la Vienne ont été contactées pour une demande de subvention. Il n'y a pas eu de réponse de leur part pour le moment.

Future exposition

Les moyens conséquents attribués par l'Espace Mendès France à la réalisation de la prochaine exposition sur le thème des images ne nécessiteront pas de financement spécifique de la part de la Régionale pour la conception qui nous est confiée avec l'IREM&S de Poitiers. Jean-Marie Parnaudeau représentera notre Régionale auprès de la nouvelle directrice de l'Espace Mendès France.
Par l'intermédiaire de cette publication, Dominique Gaud fait un appel pressant aux bonnes volontés pour étoffer l'équipe en charge de ce lourd travail de conception des différents pôles.

Questions diverses

Le bilan financier des Journées Nationales n'est pas totalement clos mais le solde final sera positif. Il va falloir clore le compte marchand et rendre la carte de paiement qui ne sont plus utiles et qui sont facturées à l'association.
Frédéric de Ligt va envoyer aux membres du Comité la liste actualisée de ses membres. Il a participé au Comité National des 18 et 19 mars à la place de Thierry Bacle qui a eu un empêchement.
Jean-Marie Parnaudeau propose de monter un dossier pour obtenir une subvention du fond de développement de la vie associative. Il faut imaginer un projet innovant qui pourrait être financé jusqu'à hauteur de 4 000 €. Il faut le finaliser avant novembre de cette année pour que le dossier soit examiné en janvier.

Questions d'actualité

Frédéric de Ligt informe le Comité de la sortie d'un document produit par la DEPP en mars 2023 qui dresse un bilan provisoire des choix d'enseignements de spécialité à la rentrée 2022. Par ailleurs il va profiter de sa participation au Comité National pour demander que la commission lycée se penche sur le programme de mathématiques de 1 h 30 en première, enseignement obligatoire pour tous les élèves qui n'ont pas choisi la spécialité *mathématiques.*

Prochaine réunion du Comité : le mercredi 21 juin.

Expositions

Nos expositions circulent

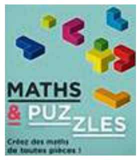
Après Chamalières, en janvier, pour l'exposition Maths & mesure, l'exposition Maths & Puzzles de l'Espace Mendès France s'est installée au collège Blaise Pascal de Saint-Flour, du 16 mars au 7 avril.

https://emf.fr/44509/lexposition-maths-et-puzzles-dans-un-college-a-saint-flour-15

Pendant ce temps-là, nos expositions petit format de la Régionale ont aussi circulé. De nombreux collèges louent les expos et font venir les élèves des écoles primaires de leur secteur. Les témoignages des uns et des autres seront les bienvenus. En voici un.

Elles s'installent au collège Albert Camus de Frontenay Rohan Rohan

__Julien Pavageau__ nous rend compte de la venue, dans son collège, des deux expositions « __Maths & Puzzles__ » et « __Maths & Mesure__ ». Il témoigne du grand intérêt manifesté par les élèves du collège et des écoles primaires du secteur. Il invite bien sûr les autres collèges à avoir le même plaisir de recevoir ces expositions. Nous l'en remercions vivement.



J'utilise depuis longtemps les puzzles en classe dont le Curvica que Jean Fromentin m'a fait découvrir dès mon année de stage. Mais ce n'est que l'an dernier que j'ai décidé de franchir le pas et de réserver l'expo « **Maths & Puzzles** » pour la semaine des maths dans mon collège.
Le thème « **Mathématiques en forme(s)** » s'y prêtait parfaitement et j'avais eu un aperçu du super boulot fait par le trio APMEP / IREM&S / EMF en visitant l'expo à l'Espace Mendes France, mais aussi en contribuant, il y a quatre ans, à la préparation de l'expo suivante « Maths & Mesure ».

Pour créer du lien avec le primaire en complément d'un petit concours de calcul mental, le TRIO (créé en 2014 et maintenant ouvert à toute la France http://trio.acamus.net), j'avais aussi décidé un peu tardivement, d'ouvrir les visites aux écoles du secteur.

Elles ont été trois à répondre favorablement malgré les distances qui les séparent du collège et, avec nos élèves du collège, c'est un peu plus de 400 élèves qui ont visité l'expo au cours de la semaine. Il s'agissait essentiellement d'élèves de cycle 3 (cinq classes) et du niveau 5ème car les manipulations concernent davantage ces niveaux même si plusieurs puzzles ont été directement montrés dans les classes de 4ème et de 3ème. J'encourage vivement les collègues à réserver cette expo qui a beaucoup plu et qui propose de nombreuses manipulations (quelques photos de notre installation dans cet article pour s'en convaincre : https://acamus.net/index.php?option=com_content&view=article&id=2094:mathsetpuzzles&catid=41&Itemid=219).

Forts de cette première expérience et dans le cadre des actions du Labomaths qui venait d'ouvrir ses portes dans notre collège, le thème de la semaine des Maths étant cette année « **Mathématiques à la carte** », nous avons opté pour l'expo « **Maths & Mesure** » mais, cette fois-ci, pour une durée de deux semaines. Le coût supplémentaire est faible (90 € la semaine de location et seulement 60 € les semaines supplémentaires) et cela laisse davantage de latitude pour organiser les visites. Dans le cadre du Labomaths, nous avons pu préparer, avec des collègues du collège et une collègue du primaire, le livret de visite qui nous avait fait un peu défaut l'an dernier. Trois classes de CM ont répondu favorablement et, cette année, c'est un peu plus de 500 élèves qui ont pu en profiter.

Nous avons également eu le plaisir de recevoir une délégation composée entre autres de Madame Robert, rectrice de l'académie, et de nos trois IPR, Messieurs Dupeyrat, Durand et Peyrot.

Cette délégation était accompagnée d'une collègue de primaire qui avait visité l'expo « Math & Puzzles » chez nous avec sa classe de CM et qui, devenue récemment conseillère pédagogique départementale, avait de toute évidence fait la promotion de nos actions auprès des services académiques des Deux-Sèvres et plus particulièrement de sa directrice Véronique Guggiari, également présente. À noter que nous avons aussi animé, pour l'occasion, une séance de bridge scolaire. J'invite les collègues qui ne connaissent pas ce jeu à s'inscrire aux stages animés tous les ans par Géraldine Gadé.

NDLR : Géraldine Gadé a tenu un stand et animé un atelier aux Journées Nationales 2022 de l'APMEP à Jonzac. Elle a écrit un article très complet sur le sujet : https://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article1197&non_pagine

En attendant un éventuel stage dédié à l'expo « Maths & Mesure » — j'ai profité de la présence de nos IPR pour leur soumettre l'idée — et si cela peut aider des collègues à se lancer, je vous livre ci-dessous l'organisation que nous avons adoptée au collège pour des visites de 55 minutes avec les cycles 3 :

- **temps 1** (accueil des élèves) : 10 à 12 groupes de 2 ou 3 élèves (constitués ou pas à l'avance) reçoivent chacun, en rentrant dans l'expo, un exemplaire du carnet de visite où une seule question a été surlignée puis viennent s'asseoir au sol (l'an dernier j'avais prévu quelques chaises mais il faut avoir la salle adaptée).

- **temps 2** (présentation de l'expo, pôle 1, et « mini conférence » de moins de 10 min sur le pôle 2 que les élèves n'auront pas le loisir d'étudier) : lien avec le thème de la semaine des maths avec les projections cartographiques de l'expo et le pôle 1 + anciennes unités de mesure de longueur basées sur le corps humain + révolution du mètre (voir les premières minutes de la vidéo de l'Espace Mendès France sur le pôle 2 qui m'ont beaucoup inspirées)

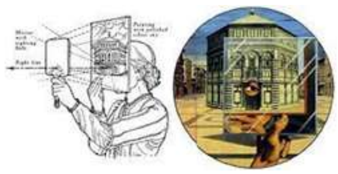
- **temps 3 et 4** (pôle 3 sur les aires pour la moitié du groupe et pôle 4 sur les volumes pour l'autre moitié) : les élèves se répartissent dans les différentes activités en commençant par la question surlignée (des étiquettes avec les numéros des questions sont collées sur les tables), puis les groupes ont pour mission de répondre à un maximum de questions et, à la moitié du temps, on échange les groupes.

- **temps 5** (dernière courte intervention en plénière pour évoquer le pôle 5, la Terre étant représentée par la boule de l'expo méridiens/parallèles découpée au laser) : 5 minutes d'interaction avec les élèves en matérialisant des distances avec les objets et les instruments de mesure de l'expo (diamètre de la Lune avec sphère en polystyrène ou balle de tennis et pied à coulisse, PUIS distance Terre/Lune avec surtout la chaîne d'arpenteur même si les élèves proposent au départ des instruments qui mesurent des longueurs bien plus petites, PUIS Diamètre du soleil avec l'odomètre, PUIS Distance Terre/Soleil, et là on peut les laisser partir avec l'odomètre pour parcourir les 3,6 km estimés à la louche…)

Pour terminer, après la visite, j'ai pris quelques minutes en classe lors de la séance suivante pour faire un bilan du carnet de visite et j'ai parfois complété par la vidéo de Mendès du pôle 3 qui interroge en particulier sur le périmètre et l'aire d'un rectangle. On peut demander aux élèves de trouver l'erreur, comme cela a été proposé dans la partie « Thème » du Rallye 2021.

En complément :
- le carnet de visite avec quelques détails sur les interventions du temps 2 et du temps 5 et aussi des pistes pour le cycle 4 est là :
https://nuage03.apps.education.fr/index.php/s/9m7fAReRWYKqBpD
- des photos et les liens vers les vidéos réalisées par l'espace Mendès France pendant le confinement sont là :
https://acamus.net/index.php?option=com_content&view=article&id=2199:mathsetmesure&catid=76&Itemid=361

En préparant l'expo…



Voyage en Europe sur les traces des inventeurs de la perspective

Dominique Gaud

Et nous continuons à faire la promotion des mathématiques en attaquant la phase finale de la conception de la nouvelle exposition : ***Maths & Images****, qui sera inaugurée le jeudi 28 septembre.*

Préparer une exposition de mathématiques c'est :
- choisir un thème,
- se confronter à des sujets plus ou moins connus de nous,
- enrichir sa culture à la fois mathématique mais aussi connexe aux mathématiques,
- apprendre en équipe,
- travailler avec techniciens, infographistes, animateurs,
- rencontrer des spécialistes du sujet,
- revisiter sa façon d'enseigner les mathématiques,
- …

Les contenus d'une exposition sont apportés par une équipe d'enseignants de primaire, collège, lycée, université avant d'être mis en images et animations par les professionnels de l'Espace Mendès France.
Conçues par des enseignants, les expositions visent à montrer :
- aux élèves et visiteurs différents domaines où des mathématiques interviennent,
- aux enseignants qu'il est possible d'innover en classe.

Les enseignants intéressés pour préparer les prochaines expositions peuvent nous rejoindre. Aucune compétence n'est nécessaire si ce n'est vouloir élargir son champ d'action, explorer de nouveaux espaces et se cultiver.

Dans cet article, nous allons développer un des aspects de ce que nous a apporté cette préparation simplement autour de la création de la perspective, un des pôles de la future exposition ***Maths et images****. À savoir :*

- *voir sous un angle plus mathématique quelques-unes des œuvres d'art qu'au fil de nos recherches nous avons consultées,*
- *(re)découvrir des sites ou œuvres pas toujours répertoriés dans les guides touristiques.*

Nous vous les soumettons et ainsi vous pourrez préparer vos futures vacances !
Notre choix est plus chronologique que géographique.

1. Pompéi

Représentation de la profondeur

À Pompéi comme à Herculanum, il faut repérer les essais pour représenter la profondeur dans les mosaïques et les fresques, et il y en a beaucoup.

Maison de Marcus Lucretius Fronto (premier siècle)

2. Ravenne

Une perspective dans un aplat

À Ravenne, dans l'église San Vitale, on trouve aussi des tentatives de représentation de l'espace.

Mosaïque du Chœur San Vitale Ravenne (VI^e^ siècle)

3. Padoue

La perspective aérienne

Avec Giotto (vers 1305) commence la révolution picturale qui donnera naissance à la perspective, en particulier aérienne.



Trois fresques de la Chapelle des Scrovegni à Padoue montrent des perspectives mais aussi des trompe-l'œil (la troisième représentation est une fresque !). On retrouve ces mêmes essais à Assise.

4. Sienne

Les prémisses de la perspective

Prolongeons nos pérégrina-tions par Sienne et sa pina-cothèque où se dévoilent les prémisses de la perspective avec Duccio (la technique des arêtes de poisson) et les frères Lorenzetti : c'est par la repré-sentation des carrelages que débutera la recherche mathé-matique de la profondeur. Lorenzetti applique la règle[1] des 2/3.

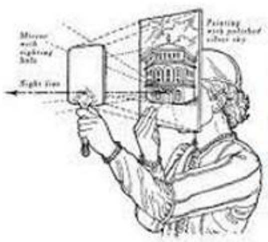
Duccio,
Dernière Cène (1308)
Museo dell'Opera del Duomo
Sienne

Ambrogio Lorenzetti,
L'annonciation (1344),
Pinacothèque Sienne

5. Florence

Le berceau de la perspective

Le baptistère ne peut qu'évoquer l'expérience de la Tavoletta de Brunelleschi.



Donatello, *Le festin d'Hérode* (1427)
Baptistère San Giovanni Sienne

Masaccio, *Trinité,* (1427),
Église Santa Maria Novella, Florence.

Il faut bien regarder dans les musées et églises les bas reliefs de Donatello, les portes du paradis du Baptistère de Guiberti, et admirer la maîtrise de la perspective par ces artistes tous amis sans oublier leur protégé Masaccio qui révolutionne la peinture avec sa *Trinité* à l'église Santa Maria Novella.

[1] Cette règle est expliquée dans le document d'accompagnement de l'exposition qui paraîtra pour l'inauguration le 28 septembre 2023.

6. Venise
Les polyèdres d'Uccello

Uccello (douce perspective) pavera des perspectives de solides dans les allées de la basilique Saint-Marc de Venise mais aussi dans une des chapelles de San Pantalon toujours à Venise. Le touriste regarde en l'air ; mais le touriste matheux regarde aussi le sol. (voir feuilleton sur les polyèdres)

7. Rome baroque
Trompe-l'œil et anamorphoses

À Rome, il y a des lieux loin des foules qui valent le détour.

Saint Ignace et son magnifique plafond en trompe-l'œil mais aussi la fausse coupole peinte sur un fond plat qui d'un certain point trompe nos sens

Le palais Spada et la fausse perspective de Borromini

La trinité des Monts (à côté de la villa Médicis) où l'on trouve les anamorphoses de Maignan (XVII^e^)

La villa Farnesina qui possède une salle des perspectives peinte de façon illusionniste au XVI^e^ siècle : trompe-l'œil, fausse perspective.

À gauche, la salle des perspectives vue du bon endroit et à droite d'un autre lieu.

8. Vicence
Le théâtre

La perspective du couloir est parfaite : le couloir central paraît très long alors qu'il est très court, image saisissante de perspective raccourcie.

9. Urbino

La maitrise de la perspective

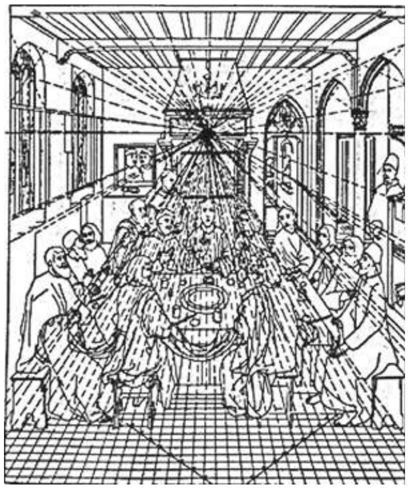
À Urbino on trouve la flagellation [2] du Christ du peintre et mathématicien e Piero della Franscesca très célèbre car la maîtrise de la perspective est totale dans cette œuvre. Sans oublier les magnifiques marqueteries du Studiolo dessinés par Botticelli et Bramante.

En Europe du Nord

Mais la perspective n'est pas ignorée en Europe du nord. Voici quelques exemples de mise en pratique de la perspective

À Louvain

On remarque que la perspective des objets géométriques est totalement maîtrisée mais il n'en est pas de même des personnages.



La Cène, panneau central du polyptique du Saint Sacrement (entre 1464 et 1468) DIRK BOUTS Collégiale Saint Pierre, Louvain

À Londres

Et plus exactement à la National Gallery, on ne manquera pas le célèbre tableau des ambassadeurs et sa magnifique anamorphose.

[2] Huile et tempera sur panneau, 58,4 x 81,3 cm, Urbino, Galleria Nazionale delle Marche

Mais on pourra s'attarder sur *l'Annonciation* (1486) de Crivelli qui permet de repérer facilement le point de fuite et les points de distance.

Parmi les magnifiques œuvres exposées, il faut repérer la boîte à perspective de Samuel van Hoogstraten (XVII^{e} siècle) où on retrouve une illusion surprenante dont voici le patron.

Nous avons exploré aussi d'autres mondes inconnus liés aux anamorphoses, au street art, aux objets « impossibles », de quoi renouveler l'enseignement de la géométrie.

À suivre dans un prochain épisode…

Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

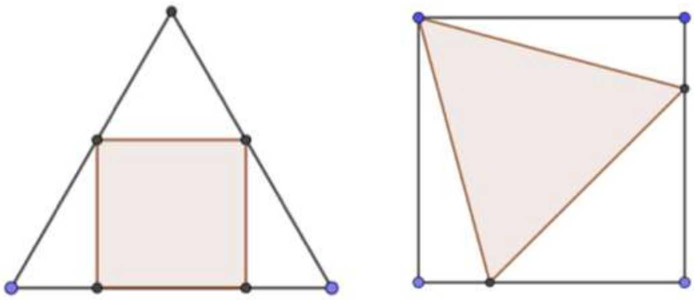
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

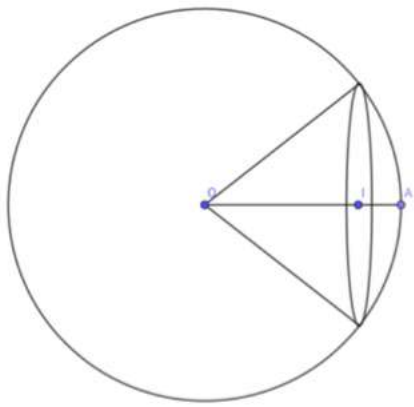
132-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Qu'est-ce qui occupe le plus de place : un triangle équilatéral inscrit dans un carré ou un carré inscrit dans un triangle équilatéral ?



132-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*

Couper une sphère par un plan, de telle sorte que le segment sphérique ayant une base déterminée par ce plan soit équivalent au cône de même base qui a pour sommet le centre de la sphère (problème du bac 1808 à Nancy).



132-3 *proposé par Walter Mesnier (Poitiers)*

Lors d'un problème d'optimisation, un élève de première, spécialité maths, indique dans sa copie : « *La dérivée s'annule pour x = 64,2, or on cherche un nombre x entier, le maximum est donc atteint pour x = 64, car il est le plus proche de 64 que de 65.* »
Son argument est faux. J'ai cherché un contre-exemple simple, c'est-à-dire une fonction f telle que $f(64) < f(65)$ et qui admet un maximum pour x = 64,2.
C'est impossible avec un trinôme. Mais c'est bien possible avec un polynôme de degré 3. Sauriez-vous démontrer ces deux affirmations ?

132-4 *D'après une idée de Serge Parpay (Niort)*

L'équation $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = \square$ admet une unique solution non triviale 65, en effet $65^2 - 56^2 = 33^2$.
Qu'en est-il de l'équation $\overline{abc}^2 - \overline{cba}^2 = \square$?

Des solutions

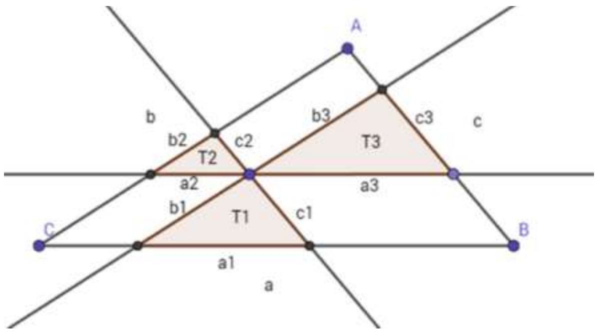
127-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

On a tracé les droites parallèles aux côtés du triangle ABC passant par un point intérieur au triangle. Il apparaît trois triangles t_1, t_2 et t_3 d'aires respectives T1, T2 et T3. Si on note S l'aire du triangle ABC, montrer qu'alors : $\sqrt{S} = \sqrt{T1} + \sqrt{T2} + \sqrt{T3}$.

Solution de Louis Rivoallan

Utilisons les notations habituelles pour les longueurs des côtés du triangle ABC : a, b, c, et pour les longueurs des côtés des triangles T_i : a_i, b_i, c_i avec i valant 1, 2 ou 3.

Tout d'abord, puisque les côtés opposés d'un parallélogramme sont de la même longueur, on a la relation $a = a_1 + a_2 + a_3$ (idem pour b ou c).



Les triangles T_i ayant leurs côtés parallèles à ceux du triangle ABC, ces triangles sont donc semblables.

Soit k_i le coefficient tel que $a_i = k_i a$, $b_i = k_i b$ et $c_i = k_i c$.

On a donc $a = k_1 a + k_2 a + k_3 a$ et par suite $1 = k_1 + k_2 + k_3$.

Par ailleurs, la formule de Héron pour l'aire du triangle donne

$$16S^2 = (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c).$$

De même pour T_i :

$$16T_i^2 = (a_i + b_i + c_i)(a_i - b_i + c_i)(a_i + b_i - c_i)(-a_i + b_i + c_i).$$

$$16T_i^2 = k_i^4\,(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)$$

Donc $16T_i^2 = k_i^4 \times 16S^2$. En simplifiant et en prenant la racine quatrième on obtient $\sqrt{T_i} = k_i\sqrt{S}$.

Donc $\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = (k_1 + k_2 + k_3)\sqrt{S}$ et puisque $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ on a donc

$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{S}$.

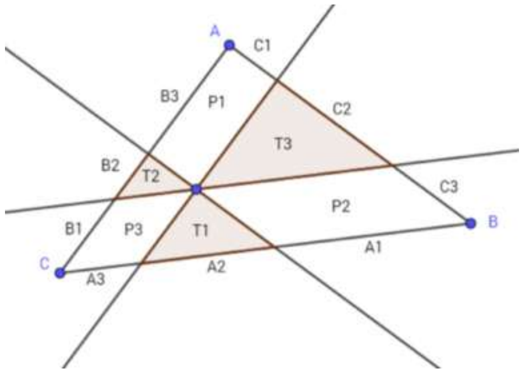
Autre version ou une fois encore la démonstration du fainéant.

En déplaçant A sur une droite parallèle à (BC) les aires des triangles ABC et T_i sont invariants.

Plaçons A tel que ABC soit un triangle isocèle. En utilisant une dilatation bien choisie, on transforme ABC en un triangle équilatéral (et les triangles T_i aussi par la même occasion).

L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Donc la racine carrée de l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}a$. Puisque $a = a_1 + a_2 + a_3$ alors $\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{S}$.

Solution de l'auteur



S = T1 + T2 + T3 + P1 + P2 + P3 où P1, P2 et P3 sont des aires de parallélogrammes.
P1 = C1.B3.sin$\hat{A}$. Mais les triangles t_2 et t_3 sont semblables ; donc $\frac{C1}{C2} = \frac{B2}{B3}$ d'où :

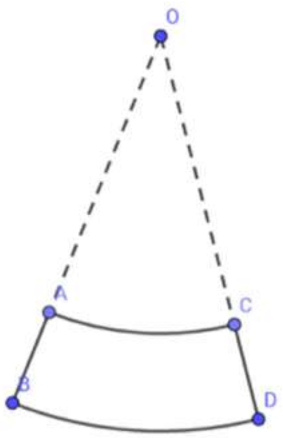
$$\begin{aligned} P1 &= (C1.B3.\sin\hat{A})^{1/2}.\ (C1.B3.\sin\hat{A})^{1/2} \\ &= (C1.B3.\sin\hat{A})^{1/2}.\ (C2.B2.\sin\hat{A})^{1/2} \\ &= (C1.B2.\sin\hat{A})^{1/2}.\ (C2.B3.\sin\hat{A})^{1/2} \\ &= 2(C1.B2.\sin\hat{A}/2)^{1/2}.\ (C2.B3.\sin\hat{A}/2)^{1/2} \\ &= 2\sqrt{T2.T3}. \end{aligned}$$

De même P2 = $2\sqrt{T1.T3}$ et P3 = $2\sqrt{T1.T2}$.
Ainsi S = T1 + T2 + T3 + $2\sqrt{T2.T3}$ + $2\sqrt{T1.T3}$ + $2\sqrt{T2.T3}$ = $(\sqrt{T1} + \sqrt{T2} + \sqrt{T3})^2$.
Finalement $\sqrt{S} = \sqrt{T1} + \sqrt{T2} + \sqrt{T3}$.

128-3 *proposé par Jacques Chayé*

Pour réaliser un abat-jour, on dispose d'une structure métallique constituée de deux cercles de diamètres 15 cm et 18 cm, reliés par trois tiges rectilignes de 15 cm.
On désire habiller cette structure d'un tissu.
Quelle découpe doit-on prévoir ?

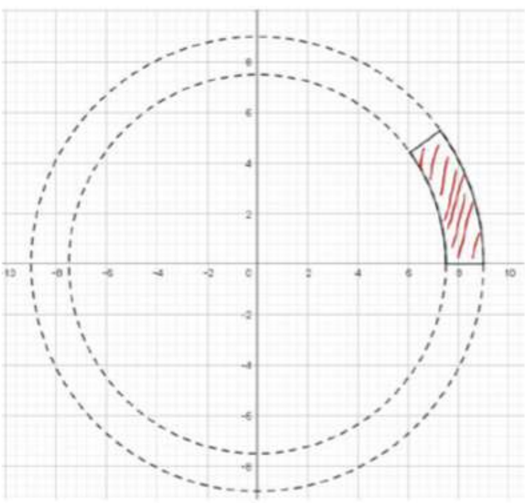
Solution de l'auteur

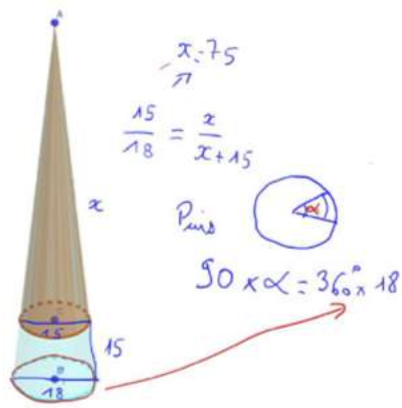


Il s'agit de construire le développement d'un tronc de cône, imaginé ci-contre à petite échelle.
On note l la longueur de l'arc d'extrémités A et C, L la longueur de l'arc d'extrémités B et D, α la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOC}$ et r la distance OA.
On a l = 15π et aussi l = rα donc rα = 15π.
L = 18π et aussi L = (r + 15)α. Par suite 18π = (r + 15)α.
On aboutit à α = π/5 et donc r = 15π/ α = (15π)/(π/5) = 75.
On peut alors tracer précisément la figure à l'aide des cercles de centre O et de rayons respectifs 75 et 75 + 15 dont on ne conserve que les arcs qui sont compris dans un secteur circulaire de π/5 radians.

Solution de Walter Mesnier

Le rayon du grand cercle est 90 et l'angle 72°.
Un bon collégien du 20e siècle devrait savoir faire cela. Aujourd'hui, il sait faire la commande sur Internet.





130-1 *proposé par Frédéric de Ligt*

Il s'agit de placer tous les entiers de 1 à 16 dans cette grille de telle sorte que chaque entier soit la moyenne arithmétique des quatre entiers qui lui sont adjacents. Avant d'essayer de résoudre un système linéaire de 16 équations à 16 inconnues vous pourrez utilement visionner la vidéo d'Olivier Druet à l'adresse https://video.math.cnrs.fr/carres-magiques-de-dirichlet/

Solution de l'auteur

Avec un petit programme informatique comme suggéré dans la vidéo on trouve sans trop de peine les nombres à placer dans la grille.

	17	27	-10	36	
-18	3	11	6	14	-1
-15	2	8	9	15	33
20	12	10	7	4	-7
21	16	13	5	1	-2
	18	21	-1	-3	

131-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

Si des points du plan, en quantité infinie, sont tous situés à des distances mutuelles mesurées par des nombres entiers alors ils sont nécessairement tous alignés.

Solution de l'auteur

Soit E un ensemble infini de points du plan dont les distances mutuelles sont toutes entières. On peut bien sûr les disposer le long d'une droite graduée, mais alors ils sont tous alignés. On suppose maintenant qu'il existe une autre disposition où tous les points ne seraient pas alignés. Il existe alors au moins trois points A, B et C non alignés. On note AB = n et AC = m. D'après l'inégalité triangulaire pour tout point M du plan on a $|\mathrm{MA} - \mathrm{MB}| \leq \mathrm{AB}$. Comme MA et MB sont entières quand M est dans E, alors pour tout M de E il existe un entier naturel k $\leq$ n tel que $|\mathrm{MA} - \mathrm{MB}| = \mathrm{k}$. Ceci est la définition bifocale d'une hyperbole de foyers A et B dont la distance entre les sommets vaut k. Tout point M de E appartient donc à l'une des hyperboles de cette famille H_1 d'hyperboles deux à deux distinctes. On mène le même raisonnement avec la longueur entière AC = m. On définit ainsi une famille H_2 d'hyperboles deux à deux distinctes. Ces deux familles n'ont pas d'hyperbole en commun.
Tout point M de E appartient donc à l'intersection d'une hyperbole de H_1 et d'une hyperbole de H_2. Mais deux hyperboles distinctes se coupent en au plus 4 points. Il y a donc au plus 4(n+1)(m+1) points d'intersection entre ces deux familles d'hyperboles, ce qui est une quantité finie de points. Contradiction.
Cette question a été résolue par P. Erdös et NH. Anning en 1945 puis améliorée comme ci-dessus par P. Erdös la même année (Bull. Amer. Math. Soc.)

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. regapmep@apmep-poitoucharentes.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication Frédéric de Ligt
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon
Siège social Voir adresse ci-dessus
Imprimerie IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)
Dépôt légal Mars 2023