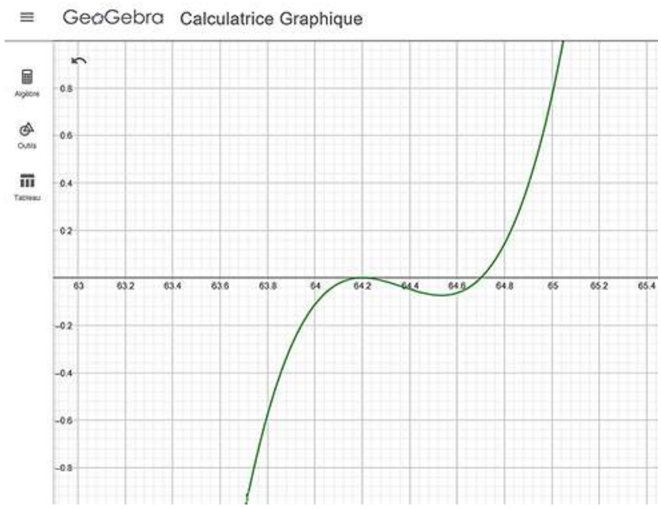
Finalement EC = HE, c'est-à-dire que E est le milieu de [HC]. Comme (DH) est parallèle à (CF), la propriété de Thalès en configuration croisée permet de conclure que E est le milieu de [DF].

132-3 *proposé par Walter Mesnier* :

Lors d'un problème d'optimisation, un élève de première spécialité maths indique dans sa copie : « La dérivée s'annule pour x = 64,2, or on cherche un nombre x entier, le maximum est donc atteint pour x = 64, car il est le plus proche de 64 que de 65. »
Son argument est faux. J'ai cherché un contre-exemple simple, c'est-à-dire une fonction f telle que $f(64) < f(65)$ et qui admet un maximum pour x = 64,2.
C'est impossible avec un trinôme. Mais c'est bien possible avec un polynôme de degré 3. Sauriez-vous démontrer ces deux affirmations ?

Solution de Philippe Rogeon

Cas d'un trinôme f du second degré.
Si f admet un maximum en 64,2, son graphe est une parabole symétrique par rapport à la droite d'équation x = 64,2. f est croissante pour x < 64,2 et décroissante pour x > 64,2. Pour des raisons de symétrie f(64,2) > f (64) > f (65).
Autre argument : on peut écrire de façon classique $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$.
Comme la dérivée de f s'annule en 64,2, on obtient $b = -128{,}4 \times a$.
On a alors $f(65) - f(64) = a(65^2 - 64^2) + b = 129 \times a - 128{,}4 \times a = 0{,}6a < 0$.

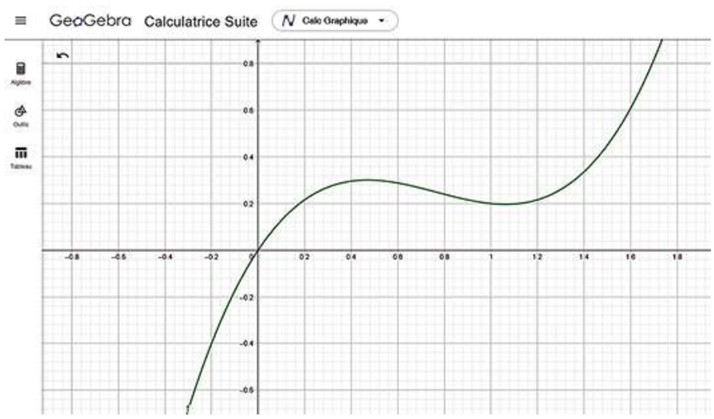


Exemple d'un polynôme de degré 3 : $F(x) = 4(x - 64{,}2)^3 - 2(x - 64{,}2)^2$ semble convenir.

Solution de l'auteur

Quitte à faire un changement de variable, on considère la fonction de degré 3 :
$f(x) = x^3 - 2{,}3x^2 + 1{,}5x$.
On a $f'(x) = 0$ sur [0 ; 1] pour $x_0 \approx 0{,}47$

$f(0) = 0$; $f(1) = 0{,}2$, $f(x_0) \approx 0{,}3$ et $f(0) < f(1)$ alors que l'arrondi à l'unité de x_0 est 0.
N.D.L.R. Ce polynôme a l'avantage de ne pas avoir de minimum sur l'intervalle [0 ; 1].



132-4 *D'après une idée de Serge Parpay*

L'équation $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = \square$ admet comme unique solution 65, en effet $65^2 - 56^2 = 33^2$.
Qu'en est-il de l'équation $\overline{abc}^2 - \overline{cba}^2 = \square$?

Solution de Walter Mesnier

Il y a moins de mille tests à faire. On peut en économiser facilement en supposant que a > c, mais il en reste trop pour s'affranchir d'un petit programme en python qui va gentiment le faire pour nous. Conclusion : Aucune solution non triviale pour cette équation.

```
for a in range(1,10):
    for  c in range(0,a):
        for b in range(0,10):
            abc=100*a+10*b+c
            cba=100*c+10b+a
            x=abc**2-cba**2
            if sqrt(x)==int(sqrt(x)): print(abc)
```