Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 7 juin 2013 ∾ STI2D–STL–SPCL

EXERCICE 1 **4 points**

1. Le carré de z est égal à :
   $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z^2 = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 4 \times (-\mathrm{i}) = -4\mathrm{i}$. Réponse **a.**
2. L'inverse de z est égal à : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Réponse **d.**
3. L'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :
   - $f(x) = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ ou
   - $f(x) = \alpha\cos(2x + \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ ou
   - $f(x) = \alpha\sin(2x + \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

   La réponse est donc **b.**
4. On a $p(X \geqslant 8) = 1 - p(X < 8)$
   Or $p(X < 8) = \displaystyle\int_0^8 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^8 = -\mathrm{e}^{-8\lambda} + 1$.
   Donc $p(X \geqslant 8) = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-8\lambda} + 1\right) = \mathrm{e}^{-8\lambda} = \mathrm{e}^{-8\times 0,2} = \mathrm{e}^{-1,6} \approx 0,20$. Réponse **b.**

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,4u_n + 3.$$

1. $u_1 = 0,4 \times 8 + 3 = 6,2$.
   $U_2 = 0,4 \times 6,2 + 3 = 5,48$.
2. Dans la cellule B3, on saisit =0,4*B2+3.
3. Il semble que la suite décroisse et converge vers 5.
4. L'entier N représente le rang de chaque terme de la suite, soit n.
5. **a.** Puisque (v_n) est une suite géométrique $v_n = v_0 \times 0,4^n = 3 \times 0,4^n$.

   b. Comme $0 < 0,4 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$. Donc la limite de la suite (v_n) est égale à 0.

   c. Puisque $v_n = u_n - 5$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - 5 = 0$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 5$.
   La conjecture faite à la question 3 est validée.

EXERCICE 3 **4 points**

1. On sait que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions :
   $x \longmapsto f(x) = K\mathrm{e}^{-0,04x} + \dfrac{0,8}{0,04} = K\mathrm{e}^{-0,04x} + +20$, avec $K \in \mathbb{R}$ quelconque.
   La solution g particulière vérifie $g(0) = 100$, soit $K + 20 = 100$ ou $K = 80$.
   On a donc $g(t) = 80\mathrm{e}^{-0,04t} + 20 = 20\left(1 + 4\mathrm{e}^{-0,04t}\right)$.

2. **a.** La température après 30 min est : $g(30) = 20\left(1+4\mathrm{e}^{-0,04\times 30}\right) = 2020\left(1+4\mathrm{e}^{-1,2}\right) \approx 44,1°$.
   La grand-mère a sous-évalué le temps de refroidissement.

   b. Il faut trouver t tel que $g(t) = 37$, soit
   $20\left(1+4\mathrm{e}^{-0,04t}\right) = 37 \iff 80\mathrm{e}^{-0,04t} = 17 \iff \mathrm{e}^{-0,04t} = \dfrac{17}{80}$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $-0,04t = \ln\frac{17}{80} \iff t = -\dfrac{1}{0,04}\ln\frac{17}{80} \approx 38,720$ soit 38 min et $0,72\times 60 = 43,2$ s.
   Le temps nécessaire pour que la température descende à 37° est à la seconde près 38 min 43 s.

EXERCICE 4 **7 points**

A. Loi normale

1. La calculatrice donne $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6) \approx 0,98$ à 10^{-2} près.
2. On sait que pour une une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ on a :
   $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$, mais en fait de façon plus précise :
   $P(\mu - 0,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$, donc $P(75-h) \leqslant L \leqslant 75+h) = 0,95$ pour $h \approx 1,96\sigma$, soit $h \approx 0,49$

B. Loi binomiale

1. On a une épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir une pièce produite le succès consistant à tirer une pièce non-conforme de probabilité $p = 0,02$. L'expérience consistant à répéter 20 fois ce tirage est un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire comptant le nombre de succès suit dont la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;\,0,02)$.
2. On a $P(X=0) = 0,02^0 \times 0,98^{20} \approx 0,6676$.
3. La probabilité cherchée est $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,98^{20} \approx 0,3324$ à 10^{-4} près.
4. On sait que $E(X) = np = 20\times 0,02 = 0,4$, nombre de pièces défectueuses pour 20 pièces tirées ou ce qui est plus parlant 2 pièces défectueuses pour 100 pièces tirées.

C. Intervalle de fluctuation

1. Il faut d'abord vérifier que l'on peut utiliser un intervalle de fluctuation :
   - $n \geqslant 30$: on a bien $80 \geqslant 30$;
   - $np \geqslant 5$: $80\times 0,02 = 1,6 \geqslant 5$ FAUX ! ;
   - $n(1-p) \geqslant 5$: $80\times(1-0,02) = 80\times 0,98 = 76,4 \geqslant 5$.

   Si l'on calcule l'intervalle avec la formule $\left[p - 1,96\sqrt{p(1-p)}n\,;\ p + 1,96\sqrt{p(1-p)}n\right]$ on trouve l'intervalle $[-0,010\,;\,0,050]$ ce qui n'a pas de sens !

2. La fréquence des pièces non conformes dans l'échantillon prélevé est égale à $\dfrac{3}{80} = 0,0375$, soit 3,5 %.
3. Comme 0,037 5 est bien dans l'intervalle de fluctuation (faux) calculé ci-dessus on ne va pas réviser la machine.

Annexe 1

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,076 81
7	5	5,030 72
8	6	5,012 288
9	7	5,004 915 2
10	8	5,001 966 08
11	9	5,000 786 43
12	10	5,000 314 57
13	11	5,000 125 83
14	12	5,000 050 33
15	13	5,000 020 13
16	14	5,000 003 05
17	15	5,000 003 22
18	16	5,000 001 29
19	17	5,000 000 52
20	18	5,000 000 21