Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1998

Exercice 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

1. On a $1 \leqslant X \leqslant 9$.
2. **a.** Soit i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leqslant i \leqslant 8$) ; si ($X = i$) cela veut dire que la boule est dans le i- !ème tiroir ce qui correspond à l'évènement B_i.

   b. Si ($X = 9$) ou la boule dans le 9e tiroir (évènements B_9), soit elle n'y est pas mais alors elle est dans le 10e tiroit (évènements B_{10}).
   Donc ($X = 9$) est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.

   c. Pour $1 \leqslant i \leqslant 8$ la probabilité $p_i = \dfrac{1}{10}$. Par contre $p(X = 9) = \dfrac{2}{10}$ d'après la réponse ci-dessus.
   La loi de probabilité de X :

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(X_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

   d. $E(X) = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+18}{10} = \dfrac{54}{10} = \dfrac{27}{5} = 5,4$.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0 \iff \left(z - \sqrt{3}\right)^2 - 3 + 4 = 0 \iff \left(z - \sqrt{3}\right)^2 + 1 = 0 \iff \left(z - \sqrt{3}\right)^2 - \mathrm{i}^2 = 0$ qui donne en factorisant les deux solutions $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $e_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   b. $|z_1|^2 = |z_2|^2 = 3 + 1 = 4$, donc $|z_1| = |z_2| = 2$.
   z_1 peut donc s'écrire $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$. Son conjugué z_2 s'écrit donc $z_2 = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}}$.
   Pour placer M on construit la droite $y = 1$ qui coupe le cercle de centre O et de rayon 2 au point d'abscisse positive M.
   Pour N, on utilise la droite d'équation $y = -1$.

   c. De façon évidente Q a pour affixe $\sqrt{3} - 2 + \mathrm{i}$ et P a pour affixe $\sqrt{3} - 2 - \mathrm{i}$.
   La construction est évidente.
   — On sait déjà que $\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \overrightarrow{\mathrm{NP}} = -2\vec{u} \iff$ (MQPN) est un parallélogramme.
   — De plus M et N étant symétriques autour de (Ox), la droite (MN) est verticale et la droite (MQ) horizontale : donc (MQ) est perpendiculaire à (MN), ce qui montre que le quadrilatère est un rectangle.
   — Enfin MQ = MN = 2, ce qui montre que le quadrilatère est un losange, donc finalement un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

— Affixe de R : on a $z_R + z_P = 0 \iff z_R = -z_P = 2 - \sqrt{3} + \text{i}$.
— Affixe de E : on a $z_E = \text{i}z_P = \text{i}\left(\sqrt{3} - 2 - \text{i}\right) = 1 + \text{i}\left(\sqrt{3} - 2\right)$.
— Affixe de S : on a $z_S = \sqrt{3}z_E = \sqrt{3}\left[1 + \text{i}\left(\sqrt{3} - 2\right)\right] = \sqrt{3} + \text{i}(3 - 2\sqrt{3})$.
Le point S a la même partie réelle que M et N, donc il appartient à la droite (MN).
Comme $1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Rightarrow 3,4 < 2\sqrt{3} < 3,6 \Rightarrow -3,6 < -2\sqrt{3} < -3,4 \Rightarrow -0,6 < 3 - 2\sqrt{3} < -0,4 \Rightarrow -1 < 3 - 2\sqrt{3} < 1$. La partie imaginaire de S est comprise entre celle de M et celle de N. Donc S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

a. $1 + \alpha^2 = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 + 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3} = 4\left(2 - \sqrt{3}\right) = 4\alpha$.
$1 - \alpha^2 = 1 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 - 4 - 3 + 4\sqrt{3} = -6 + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 2\alpha\sqrt{3}$.

b. $Z = 2 - \sqrt{3} + \text{i} - \left(\sqrt{3} - 2 - \text{i}\right) = \alpha + \text{i} + \alpha + \text{i} = 2\alpha + 2\text{i}$.
$Z' = \sqrt{3} + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)\text{i} - \left(\sqrt{3} - 2 - \text{i}\right) = 2 + \text{i}\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 2 + 2\text{i}\alpha$.

c. Montrer que $|Z|^2 = 4\alpha^2 + 4$ et $|Z'|^2 = 4 + 4\alpha^2$, donc $|Z| = \left|Z'\right|$.
$\dfrac{Z}{Z'} = \dfrac{2\alpha + 2\text{i}}{2 + 2\text{i}\alpha} = \dfrac{\alpha + \text{i}}{1 + \text{i}\alpha} = \dfrac{(\alpha + \text{i})(1 - \text{i}\alpha)}{(1 + \text{i}\alpha)(1 - \text{i}\alpha)} = \dfrac{2\alpha + \text{i}\left(1 - \alpha^2\right)}{1 + \alpha^2} = \dfrac{2\alpha + 2\text{i}\alpha\sqrt{3}}{4\alpha}$
(d'après la question précédente) $= \dfrac{1 + \text{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

d. $|Z| = \left|Z'\right| \Rightarrow$ PR = PS, donc PRS est isocèle en P ;
$\dfrac{Z}{Z'} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ entraine en prenant les arguments que $\left(\overrightarrow{\text{PS}}\ ;\ \overrightarrow{\text{PR}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Le triangle isocèle en P ayant un angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$, ses trois angles ont la même mesure : il est donc équilatéral.

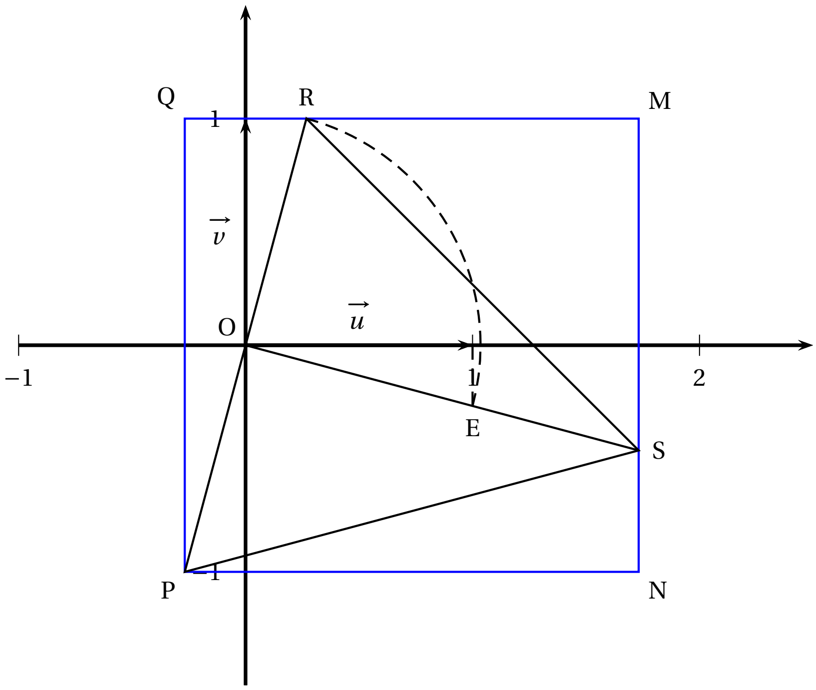
Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

$$d(x) = \text{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. En posant $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ qui est définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$, $d(x) = \text{e}^{u(x)}$.
d est donc dérivable et $d'(x) = u'(x)\text{e}^{u(x)} = \dfrac{x + 1 - x}{(x+1)^2}\text{e}^{u(x)} = \dfrac{1}{(x+1)^2}\text{e}^{\frac{x}{x+1}} > 0$ car produit de deux nombres supérieurs à zéro.
La fonction d est donc croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = -\infty$, alors par composition $\displaystyle\lim_{x \to -1} d(x) = 0$.
Comme $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} d(x) = \text{e}^1 = \text{e}$.

3. D'après la question précédente la fonction d croît de 0_+ à e donc pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < \text{e}$.



Partie B

⋆ **Étude de la fonction f**

$$f(x) = x + 1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. On a vu dans la partie A que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} d(x) == \mathrm{e}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x - \mathrm{e} + 1) = 0$. Ceci montre que la droite (D) d'équation $y = x - \mathrm{e} + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

On a $f(x) - (x - \mathrm{e} + 1) = x + 1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} - x - 1 + \mathrm{e} = -\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} + \mathrm{e}$.

D'après la question **A. 3.** $0 < \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} < \mathrm{e}$ donc $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} > 0$. Ce qui montre que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2. a. Pour $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $f(x) = x + 1 - d(x)$, donc f est dérivable et $f'(x) = 1 - d'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$. Cette fonction est elle-même dérivable et $f''(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\dfrac{2(x+1)-1}{(x+1)^4} = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$. Le signe de f'' est donc celui de $2x+1$, négatif pour $-1 < x < -\dfrac{1}{2}$, positif pour $x > -\dfrac{1}{2}$.

b. D'où le tableau de variations :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖ 1	↘	$1 - \frac{4}{\mathrm{e}}$	↗	1

3. Équation $f'(x) = 0$:

On a $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0$ (calculatrice).

Par continuité la fonction f' s'annule deux fois : en α tel que $-1 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$ et aussi en 0, avec $-\dfrac{1}{2} < 0$ admet sur $]-1~;~+\infty[$.

la calculatrice donne une valeur approchée de $\alpha \approx -0,72$ à 10^{-2} près.

4. **a.** D'après la question précédente, on peut déterminer le signe de f' et donc les varaitions de f :
— sur $]-1~;~\alpha]$, f est croissante ;
— sur $[\alpha~;~0]$, f est décroissante ;
— sur $[0~;~+\infty[$, f est croissante.

b. — Limite en -1 : on a vu que l'exponentielle a pour limite 0, donc la limite de f est 0 ;
— Limite en $+\infty$: l'exponentielle a pour limite e, donc la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

c. D'où le tableau de variations de f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$-\alpha(\alpha+1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul de $f(\alpha) = \alpha + 1 - \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$: on sait que $f'(\alpha) = 0 \iff 1 - \dfrac{1}{(\alpha+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = (\alpha+1)^2$.
Donc $f(\alpha) = \alpha + 1 - \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = \alpha + 1 - (\alpha+1)^2 = -\alpha(\alpha+1)$.

Partie C

$\star$ **Prolongement de la fonction f** en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1~;~+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} g(-1) & = & 0\\ g(x) & = & f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{array}\right.$$

On appelle $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. **a.** Si $x \in]-1~;~+\infty[$, $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{f(x)-0}{x-(-1)} = \dfrac{x+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{x+1} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right)$.

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

b. Pour $x \in]-1~;~+\infty[$, on a déjà vu que la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ est $-\infty$. En posant $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = u\mathrm{e}^{u} = -\dfrac{-u}{\mathrm{e}^{-u}}$, dont la limite quand u tend vers $+\infty$ est égale à zéro.

c. La limite de $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$ lorsque x tend vers -1 est donc finie : c'est la définition du nombre dérivé $g'(-1) = 0$.

2. Construire (D) La courbe $(\mathscr{C}')$ est la réunion de la courbe $(\mathscr{C})$ et du point $(0\,;\,-1)$.

La tangente à $(\mathscr{C}')$ au point $(0\,;\,-1)$ a pour équation :

$y-(-1) = g'(-1)(x-(-1) \iff y = x+1$.

La tangente à $(\mathscr{C}')$ au point d'abscisse α est horizontale : elle a pour équation $y = f(\alpha) = -\alpha(\alpha+1)$.

La tangente à $(\mathscr{C}')$ au point d'abscisse 0 est horizontale : elle a pour équation $y = f(0) = 0$ (axe des abscisses). D'où les graphes :