∽ Concours de recrutement interne ∽
CAPLP 2007

Corrigé de l'exercice 1

1. L'affirmation est fausse puisque la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une suite convergeant vers 0 alors qu'elle n'est pas monotone à cause de l'alternance de son signe.
2. L'affirmation est fausse : par exemple, si on prend $f(t) = t^2 - 1 = g(t)$, alors la courbe paramétrée par f et g est la demi-droite d'origine A$(-1\,;\,-1)$ passant par l'origine et cette demi-droite n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. L'affirmation est exacte puisque f est dérivable par théorèmes généraux sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour $x \neq 0$, on a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
4. L'affirmation est fausse puisque si f est la fonction définie par $f(x) = 1 - 2x$, alors f est bien continue sur $[0;\ 1]$, d'intégrale nulle sur $[0;\ 1]$ mais f n'est pas constamment nulle sur $[0;\ 1]$.

Corrigé de l'exercice 2

1. **Étude de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$**
   - **a.** Puisque $\ln(x) = 0 \iff x = 1$, f est définie sur $D =]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Puisque $x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et que $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$, alors on sait que $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.
   - **c.** On a, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ donc f est dérivable à droite en 0.
   - **d.** f est dérivable sur $D =]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ et on a $\forall x \in D,\ f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$. On a donc $f'(x) > 0 \iff \ln(x) > 1 \iff x > \mathrm{e}$. Ainsi, f est décroissante sur $]0\,;\,1[$, sur $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et est croissante sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$. On a
     $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$;
     $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ puisque f est continue en 0;
     $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$ puisque $\ln(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^-$;
     $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$ puisque $\ln(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$;
     $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par croissances comparées.
     D'où le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

2. Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$.

a. Posons $P(n)$: «$v_n \geqslant \mathrm{e}$ ». Alors :

- au rang $n = 0$, on a bien $v_0 \geqslant \mathrm{e}$ puisque $\mathrm{e} \approx 2,718$ à 10^{-3} près. Ainsi $P(0)$ est vraie.
- si, à un rang $n \geqslant 0$, on a $v_n \geqslant \mathrm{e}$, alors, puisque f est croissante sur $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, on a $f(v_n) \geqslant f(\mathrm{e})$ soit $v_{n+1} \geqslant \mathrm{e}$.

Puisque la propriété P est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang, on sait donc qu'elle est vraie à tout rang $n \geqslant 0$, *i. e.*$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \mathrm{e}$.

b. On a, pour tout entier naturel n : $v_n \geqslant \mathrm{e}$ d'où $\ln(v_n) \geqslant 1$ puis $0 < \dfrac{1}{\ln(v_n)} \leqslant 1$ et enfin $\dfrac{v_n}{\ln(v_n)} \leqslant v_n$, ce qui assure que la suite v est décroissante. Comme elle est de plus minorée par e, on sait alors qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant \mathrm{e}$.
Puisque f est continue sur $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n)$, on a, par passage à la limite quand n tend vers plus l'infini, $\ell = \dfrac{\ell}{\ln(\ell)}$ soit $\ell\ln(\ell) = \ell$ donc $\ell(\ln(\ell) - 1) = 0$ soit $\ell = 0$ ou $\ell = \mathrm{e}$. On a donc $\ell = \mathrm{e}$ puisqu'on sait que $\ell \geqslant \mathrm{e}$.

Au final, la suite v converge vers e.

c. On sait déjà que $\forall x \geqslant \mathrm{e},\ 0 \leqslant f'(x)$. De plus
$f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{4} \iff 4\ln(x) - 4 \leqslant \ln^2(x) \iff \ln^2(x) - 4\ln(x) + 4 \geqslant 0 \iff (\ln(x) - 2)^2 \geqslant 0$
ce qui est vrai et donc on a $\forall x \geqslant \mathrm{e},\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

d. Plusieurs versions sont acceptables dont les suivantes :

— Soit une fonction f de $[a\ ;\ b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a\ ;\ b]$, dérivable sur $]a\ ;\ b[$, où $a < b$. S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a\ ;\ b[,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$, on a alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

— Soit une fonction f de $[a\ ;\ b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a\ ;\ b]$, dérivable sur $]a\ ;\ b[$. S'il existe un réel A tel que $\forall x \in]a\ ;\ b[,\ |f'(x)| \leqslant A$, on a alors $|f(b) - f(a)| \leqslant A|b - a|$.

— Soit I un intervalle. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I.
S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in I,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, on a alors, pour tous réels a et b de I tels que $a < b$: $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

— Soit I un intervalle. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I.
S'il existe un réel A tel que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant A$, on a alors $|f(b) - f(a)| \leqslant A|b - a|$ pour tous réels a et b dans I.

e. La fonction f est continue sur D et donc elle l'est sur $[\mathrm{e}\ ;\ v_n] \subset]1\ ;\ +\infty[$. Elle est aussi dérivable sur D donc sur $]\mathrm{e}\ ;\ v_n[$. On sait enfin que $\forall x]\mathrm{e}\ ;\ v_n[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$. Par application de l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f(v_n) - f(\mathrm{e})\right| \leqslant \frac{1}{4}|v_n - \mathrm{e}| \text{ soit en fait } \forall n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant |v_n - \mathrm{e}|$$

Posons alors $P(n)$: « $|v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$ ».

- au rang $n = 0$, on a bien $|v_0 - \mathrm{e}| = |3 - \mathrm{e}| \leqslant 3 - \mathrm{e} = 1 = \frac{1}{4^0}$ donc la propriété P est vraie au rang 0.
- Supposons que l'on ait $|v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$ vraie à un rang $n \geqslant 0$. Alors, on sait que $|v_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|v_n - \mathrm{e}|$ et donc $|v_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$.

La propriété P est donc héréditaire à partir du rang 0.
On a donc prouvé par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$.

f. v_n est une valeur approchée de e à au moins 10^{12} près si $|v_n - \mathrm{e}| \leqslant 10^{-12}$. Ceci est vrai dès que $\frac{1}{4^n} \leqslant 10^{-12}$. Or

$$\frac{1}{4^n} \leqslant 10^{-12} \iff 4^n \geqslant 10^{12} \iff n\ln(4) \geqslant 12\ln(10) \iff n \geqslant \frac{12\ln(10)}{\ln(4)} \approx 19,93.$$

Finalement, pour $n \geqslant 20$, on a

$$|v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{1}{4^{20}} \leqslant 10^{-12}$$

ce qui signifie qu'à partir du rang $n_1 = 20$, v_n est une valeur approchée de e à au moins 10^{-12} près.

3. Solutions d'une équation différentielle

a. On a sur K, $z = \frac{1}{y}$ d'où $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Le fait que z vérifie (E) débouche alors sur le fait que y vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $x^2y'(x) + xy(x) = 1$.

b. Puisque $x \neq 0$ sur K, l'équation homogène (H_2) : $x^2y'(x) + xy(x) = 0$ est équivalente à $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$ sur K et admet donc sur K pour solutions les fonctions y_H données par

$$y_H(x) = C\exp\left(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = C\exp(-\ln x) = \frac{C}{x}.$$

On cherche alors une solution particulière de $x^2y'(x) + xy(x) = 1$ qui soit de la forme $y(x) = \frac{h(x)}{x}$.
On aboutit à $h'(x) = \frac{1}{x}$ et donc $h(x) = \ln(x)$ convient.
Les fonctions y solutions de (E_2) sur K sont donc de la forme $y(x) = \frac{C + \ln(x)}{x}$ avec C constante réelle quelconque.

Si on pose $\alpha = \mathrm{e}^C > 0$, on a $C = \ln(\alpha)$ et donc les solutions y de (E_2) vérifient $y(x) = \dfrac{\ln(\alpha)+\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(\alpha x)}{x} = g_\alpha(x)$.
Pour x appartenant à K et pour $\alpha \geqslant 1$, on a $g_\alpha(x) = 0 \iff \ln(ax) = 0 \iff ax = 1 \iff x = \dfrac{1}{\alpha}$.
Or, pour $\alpha \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\alpha} \leqslant 1$ et donc, dans ce cas, la fonction g_α ne peut pas s'annuler sur $]1\,;\,+\infty[$.

c. La courbe $\left(\Gamma_g\right)$ d'une fonction g quelconque est l'image par l'homothétie de centre O de rapport λ de la courbe $\left(\Gamma_f\right)$ d'une fonction f quelconque si cette homothétie h envoie tout point $M(x\,;\,f(x))$ de la courbe de f en un point de la courbe de g. Or, $h(M)$ est le point $N(\lambda x\,;\,\lambda f(x))$. Ce point sera donc sur la courbe de g si on a $\lambda f(x) = g(\lambda x)$.
En fait, ceci traduit seulement le fait que $h\left(\Gamma_f\right) \subset \Gamma_g$ mais l'inclusion inverse découle du fait que la relation $\lambda f(x) = g(\lambda x)$ donne, en posant $x' = \lambda x$, $\dfrac{1}{\lambda} g(x') = f\left(\dfrac{1}{\lambda}x'\right)$, ce qui signifie que $h^{-1}(\Gamma_g) \subset \Gamma_f$ d'où $\Gamma_g \subset h\left(\Gamma_f\right)$.
Or, ici on a $f_1(\alpha x) = \dfrac{\alpha x}{\ln(\alpha x)} = \alpha f_\alpha(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}_\alpha$ par l'homothétie de centre O et de rapport α et donc $\mathscr{C}_\alpha$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\alpha}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. **a.** Cette famille est libre (vérification à l'aide de la définition ou utilisation du rang ou utilisation du déterminant) et comporte trois éléments d'un espace vectoriel de dimension 3 ($\mathbb{R}^+$ en l'occurence ici). Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^+$.

   b. On obtient que

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -10 & 14 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} -12 & 24 & 0 \\ -40 & 44 & -8 \\ -8 & 16 & -4 \end{pmatrix} = 4Q^2 - 12I_3.$$

   c. On a donc $4Q^2 - Q^3 = 12I_3$ soit encore $Q \times \left(\dfrac{1}{12}\left[4Q - Q^2\right]\right) \times Q = I_3$ donc Q est bien inversible et

$$Q^{-1} = \frac{1}{12}\left(4Q - Q^2\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   d. On observe que

$$A \times {}^t\,\overrightarrow{u_1} = -2 \times {}^t\,\overrightarrow{u_1}\, A \times {}^t\,\overrightarrow{u_2} = 4 \times {}^t\,\overrightarrow{u_2}\, A \times {}^t\,\overrightarrow{u_3} = 0 \times {}^t\,\overrightarrow{u_3}$$

Ainsi, $f\left(\overrightarrow{u_1}\right) = -2\overrightarrow{u_1}$, $f\left(\overrightarrow{u_2}\right) = 4\overrightarrow{u_2}$, $f\left(\overrightarrow{u_3}\right) = \overrightarrow{0}$ ce qui signifie bien que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de f. On a ainsi :

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e. Il s'agit de la formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme : $A' = Q^{-1}AQ$.

f. On obtient par récurrence sur n que $A^n = QA'^nQ^{-1}$.

2. **a.** On a $T_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. On obtient $M = \dfrac{1}{4}A$.

c. Pour un entier naturel n fixé, les évènements $\{X_n = 1\}$, $\{X_n = 2\}$ et $\{Xn = 3\}$ forment clairement un système complet d'évènements et donc on peut utiliser la formule des probabilités totales : pour tout évènement U, on a :
$P(U) = P(\{X_n = 1\})P(U/\{X_n = 1\}) + P(\{X_n = 2\})P(U/\{X_n = 2\}) +$
$P(\{X_n = 3\})P(U/\{X_n = 3\}) =$
$a_n \times P(U/\{X_n = 1\}) + b_n \times P(U/\{X_n = 2\}) + c_n \times P(U/\{X_n = 3\})$.
Si on applique cette formule succésivement à l'évènement $\{X_{n+1} = i\}$ pour $i = 1,\ 2,\ 3$ on obtient que

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

ce qui donne immédiatement $T_{n+1} = MT_n$.

d. On a donc (par récurrence immédiate), pour tout entier n,
$T_n = M^nT_0 = \dfrac{1}{4^n}A^nT_0$.

e. On obtient que

$$Tn = \frac{1}{6\times(2^n)}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ 2^{n+2} - 4(-1)^n \\ 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

$$a_n = P(X_n = 1) = \frac{1}{6\times(2^n)}\left[2(-1)^n + 2^n\right] = \frac{1}{6}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{6}$$

$$b_n = P(X_n = 2) = \frac{1}{6\times(2^n)}\left[2^{n+2} - 4(-1)^n\right] = \frac{1}{6}\left[4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$$

$$c_n = P(X_n = 3) = \frac{1}{6\times(2^n)}\left[2(-1)^n + 2^n\right] = \frac{1}{6}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{6}$$

f. On obtient que

$$\mathrm{E}(X_n) = 1\times P(X_n = 1) + 2\times P(X_n = 2) + 3\times P(X_n = 3) = 2$$

Corrigé de l'exercice 4

1. On obtient, après calcul, que

$$\varphi(0) = 3 < \varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = 1 + 2\sqrt{2} \text{ puisque } 1 < \sqrt{2}.$$

2. La quantité $\varphi(M)$, en tant que somme de longueurs, est toujours positive ou nulle et donc sa valeur minimale l'est également, *i. e.* $m \geqslant 0$.

Par définition d'un minimum, on a $m \leqslant \varphi(M)$ pour tout point M de l'espace. On a donc notamment $m \leqslant \varphi(O)$ soit $m \leqslant 3$.

Enfin, si φ réalise son minimum m en P, on a $m = \varphi(P) = OP + AP + BP + CP$. Comme $m \leqslant 3$, on a donc

$$OP = m - AP - BP - CP \leqslant 3 - AP - BP - CP \leqslant 3.$$

puisque les longueurs AP, BP et CP sont positives ou nulles.

3. **a.** On a immédiatement $r(O) = O$, $r(A) = C$, $r(B) = A$ et $r(C) = B$.

b. La vérification est immédiate.

c. On a

$\varphi(M') = OM' + AM' + BM' + CM' = r(O)r(M) + r(B)r(M) + r(C)r(M) + r(A)r(M)$
$= OM + BM + CM + AM$ d'après la question b.
$= \varphi(M)$.

4. **a.** Puisque Q est l'isobarycentre de P, P', P'', on a, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MQ} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP'} + \overrightarrow{MP''}\right)$. De plus, on a, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \| \leqslant \| \overrightarrow{u} \| + \| \overrightarrow{v} \|$. On en tire donc que

$$\| \overrightarrow{MQ} \| \leqslant \frac{1}{3}\left(\| \overrightarrow{MP} \| + \| \overrightarrow{MP'} \| + \| \overrightarrow{MP''} \|\right).$$

b. En évaluant le résultat précédent en M égal à A, B et C, on obtient

$$\| \overrightarrow{AQ} \| \leqslant \frac{1}{3}\left(\| \overrightarrow{AP} \| + \| \overrightarrow{AP'} \| + \| \overrightarrow{AP''} \|\right).$$

$$\| \overrightarrow{BQ} \| \leqslant \frac{1}{3}\left(\| \overrightarrow{BP} \| + \| \overrightarrow{BP'} \| + \| \overrightarrow{BP''} \|\right).$$

$$\| \overrightarrow{CQ} \| \leqslant \frac{1}{3}\left(\| \overrightarrow{CP} \| + \| \overrightarrow{CP'} \| + \| \overrightarrow{CP''} \|\right).$$

En sommant ces trois inégalités, on obtient bien que $\varphi(Q) - OQ \leqslant \dfrac{1}{3}(\varphi(P) - OP + \varphi(P') - OP' + \varphi(P'') - OP'')$ et donc $\varphi(Q) - OQ \leqslant \varphi(P) - OP$ car d'une part, $\varphi(P) = \varphi(P') = \varphi(P'')$ d'après la question 3. c., et d'autre part pour $P(x\,;\,y\,;\,z)$, on a $P'(y\,;\,z\,;\,x)$, $P''(z\,;\,x\,;\,y)$ et donc $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = OP' = OP''$.

c. Si on pose P de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, on obtient que $P'(y\,;\,z\,;\,x)$, $P''(z\,;\,x\,;\,y)$ et que Q a pour coordonnées $\left(\frac{x+y+z}{3}\,;\,\frac{x+y+z}{3}\,;\,\frac{x+y+z}{3}\right)$ et donc

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{x+y+z}{3}\left[(1\,;\,1\,;\,1) \cdot \left(\frac{2x-y-z}{3}\,;\,\frac{-x+2y-z}{3}\,;\,\frac{-x-y+2z}{3}\right)\right] = 0$$

Donc on en tire que si $Q \neq O$, le triangle OQP est rectangle en Q. On a donc $OP^2 = OQ^2 + QP^2$. Comme on a supposé que P n'est pas sur l'axe , on a donc

$P = Q$ (puisque Q est lui sur) et donc $QP > 0$. On en déduit donc que $OP^2 > OQ^2$ d'où $OP > OQ$.
Si $Q = O$, on a également $OP > OQ = 0$ puisque P n'appartient pas à la droite et donc $P = O$.
Puisqu'on avait déjà $\varphi(Q) - OQ \leqslant \varphi(P) - OP$, on en déduit que $\varphi(Q) \leqslant \varphi(P) + OQ - OP < \varphi(P)$ puisque $OQ - OP < 0$.

d. À l'aide des questions précédentes, si φ réalise son minimum m en un point P, on sait désormais que P est sur Δ car si tel n'est pas le cas, on vient de voir qu'il existe un point Q de Δ en lequel $\varphi(Q) < \varphi(P)$, ce qui contredit le fait que φ est minimale en P. On sait aussi que $OP \leqslant 3$.

5. a. On a

$$\Phi(x) = \sqrt{3x^2} + 3\sqrt{(x-1)^2 + 2x^2} = \sqrt{3}(-x) + 3\sqrt{(x-1)^2 + 2x^2} \text{ si } x \leqslant 0.$$

Ainsi, lorsque $x \leqslant 0$, on a $\sqrt{3}(-x) \geqslant 0$ et $\sqrt{(x-1)^2 + 2x^2} = \sqrt{3x^2 + 2(-x) + 1} \geqslant \sqrt{1}$ d'où $\Phi(x) \geqslant 0 + 3 \times \sqrt{1} = 3 = \Phi(0)$.

b. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\Phi(x) = x\sqrt{3} + 3\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$. Comme le discriminant du trinôme $3x^2 - 2x + 1$ est négatif, cette quantité est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a, pour tout $x > 0$:

$$\Phi(x) = \sqrt{3} + 3\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$$

On voit donc clairement ici que pour $3x - 1 > 0$, *i. e.* pour $x > \frac{1}{3}$, on a $\Phi'(x) > 0$.
Ainsi, la fonction Φ est strictement croissante sur $\frac{1}{3}$; $+\infty[$.
Sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{3}\right[$, $1 - 3x > 0$ et donc

$$\Phi'(x) > 0 \iff \sqrt{3} > 3\frac{1-3x}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} \iff 3\left(3x^2 - 2x + 1\right) > 9(1-3x)^2 \iff 12x^2 - 8x + 1 < 0.$$

Les racines de ce trinôme étant $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$, on a donc $\Phi'(x) < 0$ sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{6}\right[$ et $\Phi'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$.
Finalement, la fonction Φ est strictement décroissante sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{6}\right[$ et est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

c. Le résultat est assez immédiat en tenant compte des trois questions précédentes.
On a donc $P_0\left(\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{6}\right)$ et $m = -\varphi\left(P_0\right) = \phi\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} + 3\frac{5\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

d. On vérifie aisément que $3\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{AP_0} + \overrightarrow{BP_0} + \overrightarrow{CP_0} = \overrightarrow{0}$ ce qui justifie bien que P_0 est barycentre du système de points pondérés
$\{(O\ ;\ 3), (A\ ;\ 1), (B\ ;\ 1), (C\ ;\ 1)\}$. De plus, on a

$$\overrightarrow{P_0A} \cdot \overrightarrow{P_0B} = \left(\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{4}$$

et comme $\overrightarrow{P_0A} \cdot \overrightarrow{P_0B} = P_0A \times P_0B \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{P_0A}\ ;\ \overrightarrow{P_0B}}\right)$, on en déduit que $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{P_0A}\ ;\ \overrightarrow{P_0B}}\right) = -\dfrac{1}{3}$ et donc que $\theta = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) \approx 1,91$ radian soit $\theta \approx 109$ degrés par défaut.