Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Métropole septembre 1998

Exercice 1 **4 points**

(Plus au programme)

Exercice II **5 points**

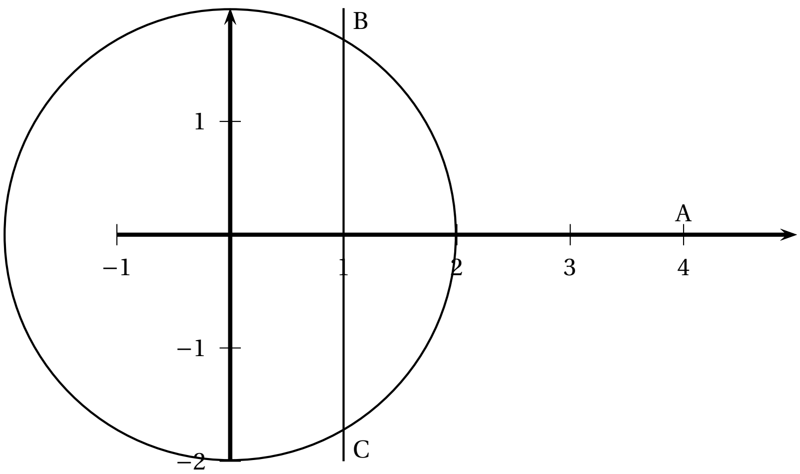
1. $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

   a. Calculer $P(4) = 64 - 96 + 48 - 16 = 0$. 0 est donc une racine de P.

   b. $P(z)$ peut donc s'écrire $P(z) = (z-4)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + (b-4a)z^2 + (c-4b)z - 4c$. Par identification $a = 1$, d'où $b - 4 = -6 \iff b = -2$, $c - 4b = 12 \iff c = 12 - 8 = 4$, $-4c = -16 \iff c = 4$.

   Donc $P(z) = (z-4)\left(z^2 - 2z + 4\right)$ et $P(z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z-4 & = & 0 \\ z^2 - 2z + 4 & = & 0 \end{array}\right. \iff$ $\left\{\begin{array}{rcl} z-4 & = & 0 \\ (z-1)^2 - 1 + 4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z-4 & = & 0 \\ (z-1)^2 + 3 & = & 0 \end{array}\right. \iff$ $\left\{\begin{array}{rcl} z-4 & = & 0 \\ (z-1)^2 - (\mathrm{i}\sqrt{3})^2 & = & 0 \end{array}\right.$ D'où les trois solutions : 4 ; $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. **a.** On a $|a|^2 = |b|^2 = 1 + 3 = 4 \iff |a| = |b| = 2$. On place B et C sur le cercle de centre O de rayon 2 et grâce à la droite d'équation $x = 1$.



   b. Les affixes de B et C sont conjugués : ils sont donc symétriques autour de (Ox) qui contient A, donc (ABC) est isocèle en A.

   D'autre part $\mathrm{BC} = 2\sqrt{3}$ et $\mathrm{AB}^2 = \| vect\mathrm{AB}\|^2 = (-3)^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$. D'où $\mathrm{AB} = 2\sqrt{3} = \mathrm{AC}$.

   Conclusion (ABC) est un triangle équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

   a. — Affixe de F : par définition de la rotation $z_{\overrightarrow{\mathrm{OF}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{\mathrm{OK}}} = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

— Affixe de G : On a $\overrightarrow{\text{KG}} = \overrightarrow{\text{OB}} \iff z_{\overrightarrow{\text{KG}}} = z_{\overrightarrow{\text{OB}}} = 1 + \text{i}\sqrt{3} \iff g - \left(-\sqrt{3} - \text{i}\right) = 1 + \text{i}\sqrt{3} \iff g = 1 - \sqrt{3} + \text{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

b. On a $\overrightarrow{\text{OC}}\binom{1}{-\sqrt{3}}$ et $\overrightarrow{\text{OF}}\binom{-\sqrt{3}}{-1}$. Donc $\overrightarrow{\text{OC}} \cdot \overrightarrow{\text{OF}} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{OC}}$ et $\overrightarrow{\text{OF}}$ sont orthogonaux, donc les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a. Le quadrilatère COFH est un parallélogramme et d'après la question précédente, deux de ses côtés sont perpendiculaires : c'est donc un rectangle. Enfin OC $= |c| = 2$ et OF $= |f| = 2$: deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est donc un losange et finalement un carré.

b. COFH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{\text{OF}} = \overrightarrow{\text{CH}} \iff z_{\text{F}} = z_{\text{H}} - z_{\text{C}} \iff z_{\text{H}} = z_{\text{F}} + z_{\text{C}} = -\sqrt{3} - \text{i} + 1 - \text{i}\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - \text{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

c. Les affixes de G et de H sont conjuguées : les points G et H sont donc symétriques autour de (Ox) qui contient A. Le triangle (AGH) est donc isocèle en A.
On a GH $= 2\left(1 + \sqrt{3}\right)$.
Calculons $\text{AG}^2 = \left(-3 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = 9 + 3 + 6\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} = 4\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 4\left(1 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\right) = \left[2\left(1 + \sqrt{3}\right)^2\right]$. Donc
AG $= 2\left(1 + \sqrt{3}\right) =$ AH. Le triangle AGH est équilatéral.

Problème **11 points**

Partie A
(hors programme)

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x\text{e}^{2x+1}.$$

a. Comme quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $\text{e}^u >$, le signe de $f(x)$ est celui de $-x$. Donc :
— si $x < 0$, $f(x) > 0$;
— si $x > 0$, $f(x) < 0$.

b. f produit de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \text{e}^{2x+1}(-1 - 2x)$ qui est du signe de $(-2x - 1)$.
Il en résulte les variations :
— si $x < -\dfrac{1}{2}$ la fonction est croissante ;
— si $x > -\dfrac{1}{2}$ la fonction est décroissante.

c. Limites :
— En $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
— En $-\infty$: $f(x) = -\text{e}x\text{e}^{2x} = -\dfrac{\text{e}}{2}(2x)\text{e}^{2x}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (2x)\text{e}^{2x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

d. D'où le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

e. — Tangente au point O : une équation de cette tangente est $y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y = \text{e}x$;

— Tangente T au point d'abscisse -1 : une équation de cette tangente est $y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1)) \iff y = \dfrac{1}{\text{e}}(x+1) + \dfrac{1}{\text{e}} \iff y = \dfrac{1}{\text{e}}x + \dfrac{2}{\text{e}}$.

f. $g(x) = \text{e}^x$. La tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) a pour équation $y - g(-1) = g'(-1)(x-(-1)) \iff y = \text{e}^{-1}(x+1) + \text{e}^{-1} \iff y = \dfrac{1}{\text{e}}x + \dfrac{2}{\text{e}}$ soit la même équation que T.

Les courbes $\mathscr{C}$ et (Γ) ont au point $\left(-1\,;\,\dfrac{1}{\text{e}}\right)$ la même tangente T.

2. $h(x) = 1 + \text{e}x\text{e}^x$.

a. h est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \text{e}\text{e}^x(1+x)$ qui est du signe de $1+x$. D'où le tableau de variations de f :

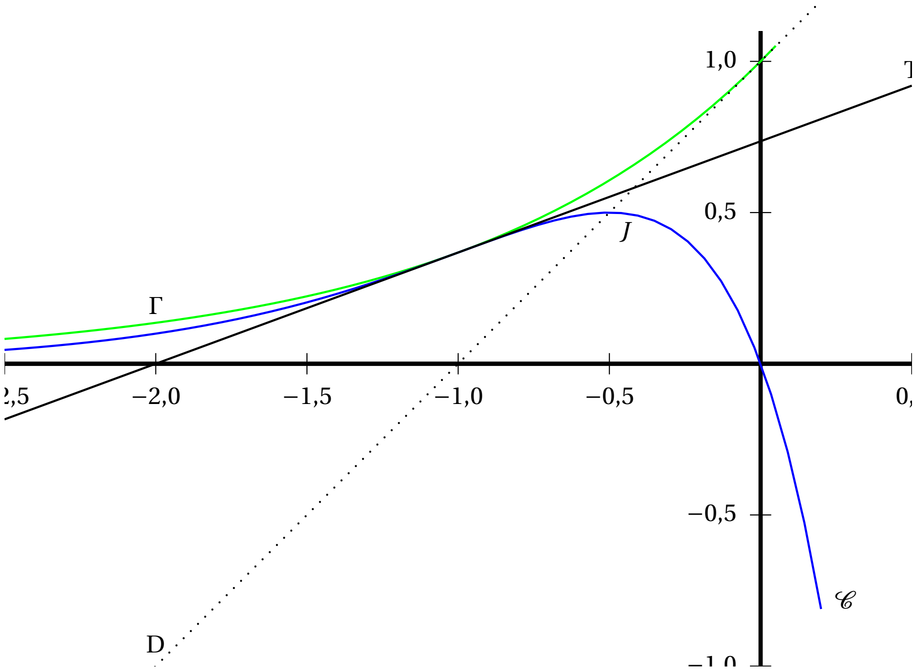
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En effet $h(-1) = 1 + \text{e} \times (-1) \times \text{e}^{-1} = 1 - 1 = 0$.
Il en résulte que 0 est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, , $h(x) \geqslant 0$.

b. Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ) : on calcule $f(x) - g(x) = -x\text{e}^{2x+1} - \text{e}^x = -\text{e}^x\,(\text{e}x\text{e}^x + 1) = -\text{e}^x h(x)$. Comme $\text{e}^x > 0$, quel que soit x, le signe de cette différence est celui de $-h(x)$.

D'après la question précédente $f(x) - g(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant g(x)$, ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de Γ, sauf au point d'abscisse -1 qui est commun aux deux courbes..

c.



3. Soit $M(m\,;\,\mathrm{e}^m)$ un point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

a. Tangente D_m à (Γ) en M. Une équation de cette tangente est $y-\mathrm{e}^m = \mathrm{e}^m(x-m) \iff y\mathrm{e}^m x+\mathrm{e}^m(1-m)$.

b. — Si $y=0$, alors $x=m-1$. Donc $A(m-1\,;\,0)$;
— Si $x=0$, alors $y=\mathrm{e}^m(1-m)$. Donc et $B(0\,;\,\mathrm{e}^m(1-m))$.
— Les coordonnées du milieu J de $[AB]$ sont donc $\left(\dfrac{m-1}{2}\,;\,\dfrac{1-m}{2}\mathrm{e}^m\right)$.

c. Calculons $f(x)=-x\mathrm{e}^{2x+1}$ avec $x=\dfrac{m-1}{2}$.
$f(x)=-\dfrac{m-1}{2}\mathrm{e}^{m-1+1}=\dfrac{1-m}{2}\mathrm{e}^m$ qui est bien l'ordonnée de J. Donc J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Pour $m=0$, l'équation de D est $y=x+1$ et $J(-0,5\,;\,0,5)$.

Partie C

1. On pose :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & t\\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{2t}\end{array}\right. \text{ d'où } \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & 1\\ v(t) & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\end{array}\right.$$
Ces fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer par parties et :
$I(x)=\left[\dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t}\right]_0^x-\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]_0^x=\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.

2. On a vu à la question **A. 1. d.** que $f(x)<0$ si $x<0$. Donc pour tout x réel négatif, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses. L'unité d'aire est égale à 4×4 cm^2, donc $\mathscr{A}(x)=16\displaystyle\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t \quad (\text{cm}^2)=16\int_x^0 -t\mathrm{e}^{2t+1}\mathrm{d}t=16\mathrm{e}\int_x^0 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=$ $16\mathrm{e}I(x)=8x\mathrm{e}^{2x+1}-4\left(\mathrm{e}^{2x+1}-\mathrm{e}\right)$.

3. Donc $\mathscr{A}(-1)=-8\mathrm{e}^{-1}-4\mathrm{e}^{-1}+4\mathrm{e}=4\mathrm{e}-\dfrac{12}{\mathrm{e}}$ (cm^2.

4. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=\lim_{x\to-\infty}2x\mathrm{e}^{2x}=0$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathscr{A}(x)=4\mathrm{e}.\quad (\text{cm}^2)$.