Correction du baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2004

EXERCICE 1 **4 points**

1. BAM est un triangle équilatéral direct, donc M est l'image de A dans la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$m-b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b) \iff m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b$$

On obtient les autres égalités de la même façon.

2. **a.** On a d'une part $z_{\overrightarrow{\text{MN}}}=n-m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a)$, et d'autre part $z_{\overrightarrow{\text{QP}}}=p-q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a)$.

Donc $z_{\overrightarrow{\text{MN}}}=z_{\overrightarrow{\text{QP}}} \iff \overrightarrow{\text{MN}}=\overrightarrow{\text{QP}} \iff$ (MNPQ) est un parallélogramme.

b. Dans la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, on a le schéma :

$$\begin{array}{lcl} \text{A} & \longmapsto & \text{Q} \\ \text{C} & \longmapsto & \text{P} \\ \text{(AC)} & \longmapsto & \text{(QP)} \end{array}$$

La droite (AC) a donc pour image la droite (QP) et par propriété de la rotation de $\dfrac{\pi}{3}$, on a $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right)=\dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi]$ et AC = QP.

De même dans la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, on a le schéma :

$$\begin{array}{lcl} \text{B} & \longmapsto & \text{N} \\ \text{D} & \longmapsto & \text{P} \\ \text{(BD)} & \longmapsto & \text{(NP)} \end{array}$$

La droite (BD) a donc pour image la droite (NP) et par propriété de la rotation de $-\dfrac{\pi}{3}$, on a $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi] \iff \left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right)=\dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi]$ et BD = NP.

3. — MNPQ est un rectangle si $\left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad [\pi] \iff$
$\left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\quad [\pi] \iff$
$\dfrac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\quad [\pi] \iff \left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}\quad [\pi] \iff$
$\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right)=\dfrac{\pi}{6}\quad [\pi]$.

— MNPQ est un losange si QP = NP, c'est-à-dire d'après la question **2. a.** QP = AC = NP = BD soit si AC = BD.

Conclusion : MNPQ est un carré si et seulement si $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right)=\dfrac{\pi}{6}\quad [\pi]$ et AC = BD.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. On a $1+1-m+2m-1+1-m=2\neq 0$ et ce quel que soit m, donc G_m existe quel que soit le réel m.

2. G_1 est le barycentre de $\{(\text{E}\,;\,1),\ (\text{B}\,;\,0),\ (\text{G}\,;\,1),\ (\text{D}\,;\,0)\}=\{(\text{E}\,;\,1),\ (\text{G}\,;\,1)\}$ donc le milieu de [EG].

3. G_0 est le barycentre de $\{(\text{E}\,;\,1),\ (\text{B}\,;\,1),\ (\text{G}\,;\,-1),\ (\text{D}\,;\,1)\}$ signifie que
$\overrightarrow{\text{G}_0\text{E}}+\overrightarrow{\text{G}_0\text{B}}-\overrightarrow{\text{G}_0\text{G}}+\overrightarrow{\text{G}_0\text{D}}=\overrightarrow{0} \iff$
$\overrightarrow{\text{G}_0\text{A}}+\overrightarrow{\text{AE}}+\overrightarrow{\text{G}_0\text{A}}+\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{G}_0\text{A}}-\overrightarrow{\text{AG}}+\overrightarrow{\text{G}_0\text{A}}+\overrightarrow{\text{AD}}=\overrightarrow{0} \iff$

$2\overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$. (1)
Or dans le cube $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$, donc (1) devient : $2\overrightarrow{G_0A} = \overrightarrow{0} \iff G_0 = A$.
En utilisant l'associativité du barycentre, (en associant les points E, B et D), on a $G_0 = A$ est le barycentre de (I, 3) et (G, −1). Ces trois points sont donc alignés (on a plus précisément $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AI}$)

4. Par définition O_2 est l'isobarycentre des points E, F, G et H, donc $\overrightarrow{O_2E} + \overrightarrow{O_2F} + \overrightarrow{O_2G} + \overrightarrow{O_2H} = \overrightarrow{0}$.
Par définition de G_m,
$\overrightarrow{G_mE} + (1-m)\overrightarrow{G_mB} + (2m-1)\overrightarrow{G_mG} + (1-m)\overrightarrow{G_mD} = \overrightarrow{0} \iff$
$\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AE} + (1-m)\overrightarrow{G_mA} + (1-m)\overrightarrow{AB} + (2m-1)\overrightarrow{G_mA} + (2m-1)\overrightarrow{AG} +$
$(1-m)\overrightarrow{G_mA} + (1-m)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AE} + (1-m)\overrightarrow{AB} + (2m-1)\overrightarrow{AG} +$
$(1-m)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{G_mA} + m\left(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{0} \iff$
$2\overrightarrow{G_mA} + m\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}\right) \iff 2\overrightarrow{G_mA} + 2m\overrightarrow{AO_2} \iff \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$.
Cette égalité montre que le barycentre G_m appartient à la droite (AO_2) et que l'abscisse de G_m pour le repère (A, O_2) est le réel m. m étant un réel quelconque G_m parcourt toute cette droite.

5. **a.** G_m appartient à la droite (A, O_2) donc au plan (AEGC) qui contient le milieu O_1 de [AC].
Donc A, G_m, E, et O_1 sont coplanaires.
b. Si G_m appartient à la droite (EI), il appartient au plan EBD et est donc un barycentre des trois points E, B et D. Il suffit donc que le coefficient de G dans la définition de G_m soit nul, soit :
$$2m-1=0 \iff m = \frac{1}{2}.$$

Partie B

1. Dans le repère orthonormal on a $\overrightarrow{AG}(1\,;\,1\,;\,1)$, $\overrightarrow{BD}(-1\,;\,1\,;\,0)$, $\overrightarrow{BE}(-1\,;\,0\,;\,1)$.
D'où $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = -1+1 = 0$, et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = -1+1 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBD) est orthogonal à ce plan.
Une équation cartésienne du plan (EBD) est : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EBD} \iff x+y+z+d=0$.
$B(1\,;0\,;0) \in (\text{EBD} \iff 1+d=0 \iff d=-1$.
On a donc :
$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EBD} \iff x+y+z-1=0$$

2. On a $O_2\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$. L'égalité $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$ permet d'obtenir en projetant sur les trois axes que $G_m\left(\frac{m}{2}\,;\,\frac{m}{2}\,;\,m\right)$.

3. On sait que $d(G_m, (\text{EBD})) = \dfrac{\left|\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+m\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|2m|}{\sqrt{3}}$.
Cette distance est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ si $\dfrac{|2m|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \iff \dfrac{|2m|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \iff |2m| = 1 \iff |m| = \dfrac{1}{2}$.
Il y a deux valeurs répondant à la question $m = \dfrac{1}{2}$ et $m = -\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3 **11 points**

Partie A

1. **a.** $P(X) = 1 + X - 2X^2$.

   $P(X) = 0$; $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9 = 3^2$.

   $P(X) = 0 \iff X_1 = \dfrac{-1+3}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ ou $X_2 = \dfrac{-1-3}{-4} = 1$.

   On sait que P est négatif sauf entre les racines $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

   b. En posant $X = \mathrm{e}^{-x}$, on trouve que $f(x) = P(X)$: le signe de f est celui de P, mais $X = \mathrm{e}^{-x}$ est positif ; donc $f(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant X \leqslant 1 \iff -\infty \leqslant x \leqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$.

   c. La courbe $\mathscr{C}$ contient donc l'origine.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

   Ceci montre que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. On peut écrire $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right)$.

   Or $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$. La limite de la parenthèse est donc égale à -2.

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4. **a.** f somme de fonctions dérivables est dérivable et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-2x}$.

   b. $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(-\mathrm{e}^{x} + 4\right)$ qui est du signe de $4 - \mathrm{e}^{x}$ car $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x.

   $4 - \mathrm{e}^{x} > 0 \iff \mathrm{e}^{x} < 4 \iff x < \ln 4 = 2\ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

   De même $4 - \mathrm{e}^{x} < 0 \iff x > 2\ln 2$.

   c. Tableau de variations

x	$-\infty$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	

   On a $f(2\ln 2) = 1 + \dfrac{1}{4} - 2 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{8+2-1}{8} = \dfrac{9}{8}$ (car $x = 2\ln 2 \iff \mathrm{e}^{x} = 4 \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{4}$.)

5. **a.** Il faut résoudre $f(x) = 1 \iff 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x} = 1 \iff \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x} = 0 \iff 1 - 2\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{2} \iff -x = -\ln 2 \iff x = \ln 2$.

   $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ n'ont en commun que le point A$(\ln 2\ ;\ 1)$.

   b. Comme $1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x} - 1 = \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-x}\right)$ qui est du signe de $1 - 2\mathrm{e}^{-x}$.

   $1 - 2\mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \mathrm{e}^{-x} < \dfrac{1}{2} \iff -x < -\ln 2 \iff x > \ln 2$.

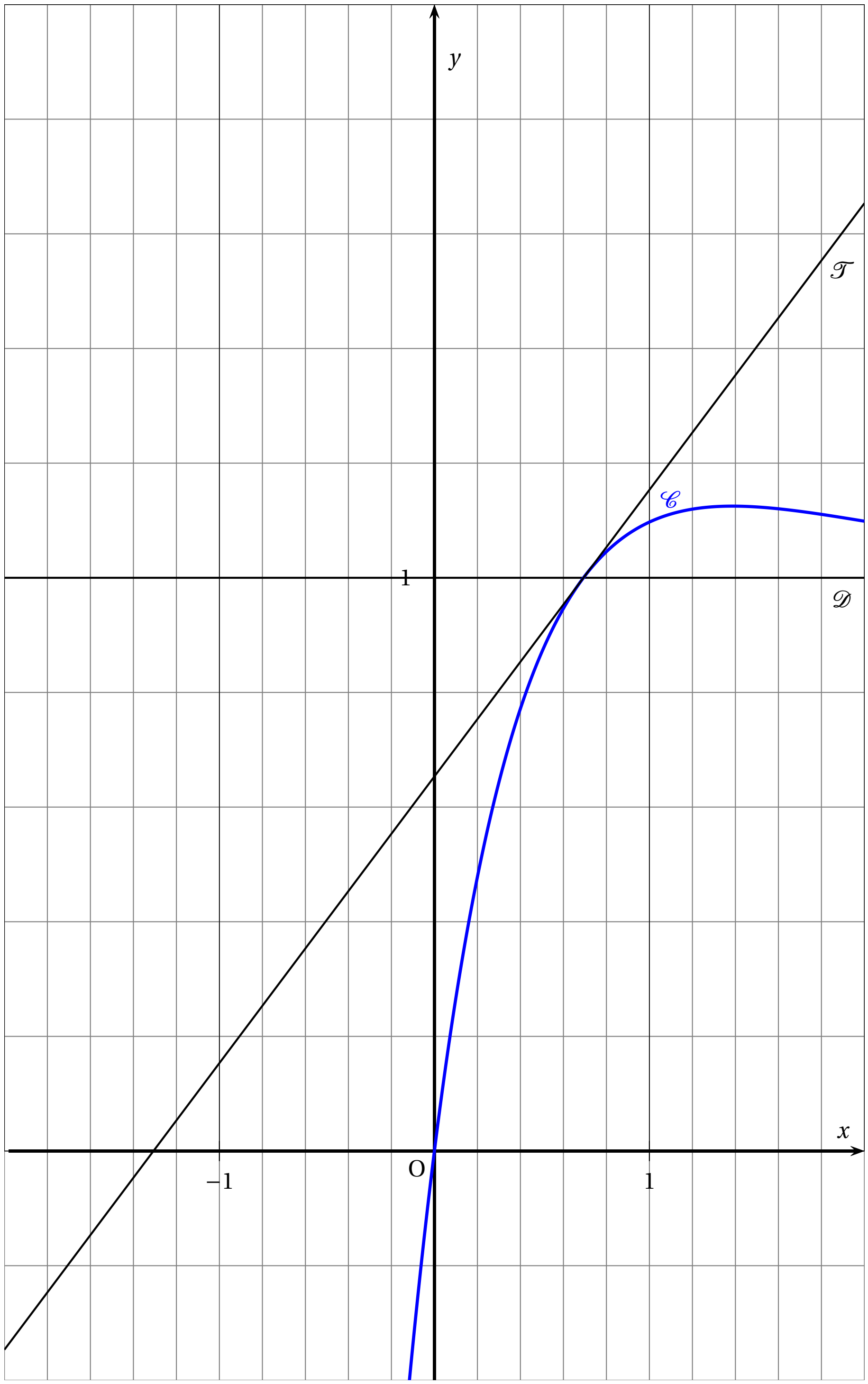
   Conclusion : $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ à droite du point A précédent et est au dessous avant le point A.

6. Comme $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-2x}$, $f'(\ln 2) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{2}$.

   Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ en A est donc :

   $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - \ln 2) \iff y = \dfrac{1}{2}(x - \ln 2) + 1$.

7. Courbe et droites



Partie B

1. La surface est le complémentaire dans le rectangle de côtés 1 et $\ln 2$ de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Donc $\mathscr{A} = 1 \times \ln 2 - \displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(1 + \text{e}^{-x} - 2\text{e}^{-2x}\right) \text{d}x = \ln 2 - \left[x - \text{e}^{-x} + \text{e}^{-2x}\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 - \left(\ln 2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - 0 + 1 - 1\right) = \dfrac{1}{4}$.

2. **a.** On a vu que pour $x > \ln 2$, $f(x) > 1$, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'intégrale d'une fonction positive est est donc un nombre positif.

   b. u_n représente la mesure en unité d'aire de la surface limitée par la droite $y = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = (n-1) + \ln 2$ et $x = n + \ln 2$.

3. **a.** On a vu que pour $x > 2\ln 2$ la fonction f est décroissante. Or $1 + \ln 2 > 2\ln 2$. Donc pour $n \geqslant 2$,
   $(n-1) + \ln 2 \leqslant x \leqslant n + \ln 2 \Rightarrow f(n+\ln 2) \leqslant f(x) \leqslant f[(n-1)+\ln 2] \iff f(n+\ln 2) - 1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant f[(n-1)+\ln 2] - 1$.

   b. En intégrant les trois fonctions de l'encadrement précédent sur l'intervalle $[(n-1)+\ln 2\ ;\ n+\ln 2]$, on obtient :

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f[(n-1)+\ln 2] - 1.$$

   c. L'encadrement précédent permet d'écrire au rang $n+1$, $f(n+1+\ln 2)-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant f[(n)+\ln 2] - 1 \leqslant u_n$, pour $n \geqslant 2$. Donc la suite (u_n) est décroissante

   d. La suite étant minorée par zéro (suite positive) et décroissante, elle est convergente vers une limite supérieure ou égale à zéro.

4. **a.** En utilisant l'égalité de Chasles $S_n = \displaystyle\int_{\ln 2}^{n+\ln 2} \left[f(x) - 1\right]\,\mathrm{d}x$.

   b. S_n est l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 1$ et les droites verticales $x = \ln 2$ et $x = n + \ln 2$.

   c. $S_n = \displaystyle\int_{\ln 2}^{n+\ln 2} \left[f(x) - 1\right]\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{n+\ln 2} \left(\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right]_{\ln 2}^{n+\ln 2} =$
   $-\mathrm{e}^{-n-\ln 2} + \mathrm{e}^{-2n-2\ln 2} + \mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\ln 2} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2n} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} =$
   $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2n} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} + \dfrac{1}{4}$.
   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$$