Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat S Polynésie septembre 1998

Exercice 1 **5 points**

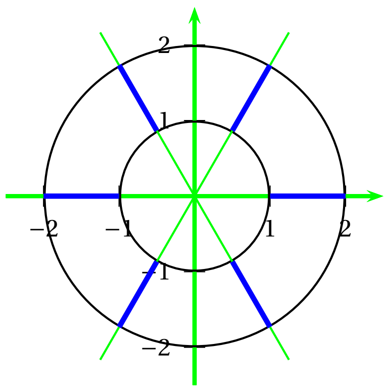
1. **a.**
   - $z_1 = -1 = 1\text{e}^{\text{i}\pi}$;
   - $z_2 = \dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$; $|z_2|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1 \Rightarrow |z_2| = 1$; $z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$;
   - $z_3 = -1-\text{i}\sqrt{3}$, donc $|z_3|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_3| = 2$; $z_3 = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b.
   - $z_1^3 = \text{e}^{3\text{i}\pi} = \text{e}^{\text{i}\pi} = -1$;
   - $z_2^3 = \text{e}^{-\text{i}\pi} = -1$;
   - $z_3^3 = 2^3\text{e}^{-2\text{i}\pi} = 8$.

2. **a.** On calcule $(x+\text{i}y)^3 = x^3 - \text{i}y^3 + 3\text{i}x^2y - 3xy^2 = x^3 - 3xy^2 + \text{i}\left(y^3 + 3x^2y\right)$.
   On a également $(x+\text{i}y)^3 = \left(\rho\text{e}^{\text{i}\theta}\right)^3 = \rho^3\text{e}^{\text{i}3\theta}$.
   Le module de z^3 est donc ρ^3 et un argument de z^3 est 3θ.

   b. z^3 est un nombre réel si et seulement si un de ses arguments est égal à 0 mod $[\pi]$ soit si $3\theta = 0 \quad [\pi] \iff \theta = \dfrac{\pi}{3} \quad \text{mod } \left[\dfrac{\pi}{3}\right]$.
   L'ensemble (E) est donc constitué des trois droites définies par $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

   c. Si de plus $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$, alors $1 \leqslant \rho^3 \leqslant 8 \iff 1 \leqslant \rho \leqslant 2$.
   L'ensemble (E′) est coloré ci-dessous :



Exercice 2 **5 points**

A(0 ; 6 ; 0), B(0 ; 0 ; 8), C(4 ; 0 ; 8).

1. **a.** Démontrer que :
   • $\overrightarrow{\text{BC}}$ (4 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{\text{BA}}$ (0 ; 6 ; −8) ; donc $\overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{BA}} = 0+0+0 = 0$; les vecteurs sont orthogonaux , les droites (BC) et (BA) sont perpendiculaires ;
   • De même $\overrightarrow{\text{CO}}$ (−4 ; 0 ; −8) et $\overrightarrow{\text{OA}}$ (0 ; 6 ; 0) ; donc $\overrightarrow{\text{CO}} \cdot \overrightarrow{\text{OA}} = 0+0+0 = 0$; les vecteurs sont orthogonaux , les droites (CO) et (OA) sont perpendiculaires.
   • $\overrightarrow{\text{BC}}$ (4 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{\text{OA}}$ (0 ; 6 ; 0) ; $\overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{OA}} = 0$; les vecteurs sont orthogonaux.
   Donc $\overrightarrow{\text{BC}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (OAB) ; conclusion la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

b. Pour calculer ce volume, on prend comme base le triangle rectangle (OAB) (puisque (OA) et (OB) sont portées par deux axes et comme hauteur [BC], d'abord la question précédente :
$\text{V(OABC)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \text{OA} \times \text{OB} \times \text{BC}}{3} = \dfrac{6 \times 8 \times 4}{6} = 32$ en cm^3.

c. (OAB) est un triangle rectangle en O et (BAC) est rectangle en C, donc O et C appartiennent à la sphère de diamètre [AB] ; le centre est le milieu de [AB](0 ; 3 ; 4) et de rayon $\dfrac{\text{AB}}{2} = \dfrac{1}{2} = 5$.

2. $M_k(0\ ;\ 0\ ;\ k)$.
Le plan (π) qui contient M et est orthogonal à la droite (OB) est donc orthogonal à l'axe des cotes : il est horizontal et contient M_k ; une de ses équations est donc $z = k$ rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.

a. Intersection de (π) et de (OC). La droite (OC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{OC}}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (OC) est donc :
$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & 2t \end{array}\right.$ Le point N commun avec le plan (π) est tel que
$z_N = k = 2t \iff t = \dfrac{k}{2}$
Les coordonnées de N sont donc $\left(\dfrac{k}{2}\ ;\ 0\ ;\ k\right)$

b. Intersection de (π) et de (AC). De même un système d'équations paramétriques de la droite (AC) est :
$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2t\\ y & = & 6-3t\\ z & = & 4t \end{array}\right.$ Le point commun P de cette droite et du plan (π) est tel que $z_P = 4t = k \iff t = \dfrac{k}{4}$.
Les coordonnées de P sont donc $\left(\dfrac{k}{2}\ ;\ 6 - \dfrac{3k}{4}\ ;\ k\right)$.

c. Intersection de (π) et de (AB). Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est :
$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\\ y & = & 6-3t\\ z & = & 4t \end{array}\right.$. Le point commun Q de cette droite et du plan (π) est tel que $z_Q = 4t = k \iff t = \dfrac{k}{4}$.
Les coordonnées de Q sont donc $\left(0\ ;\ 6 - \dfrac{3k}{4}\ ;\ k\right)$.
On a $\overrightarrow{MN}\left(\dfrac{k}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ et $\overrightarrow{QP}\left(\dfrac{k}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \iff MNPQ$ est un parallélogramme. Or les droites (MQ) et (MN) appartiennent à deux plans perpendiculaires : elles sont donc perpendiculaires : donc le quadrilatère est un rectangle.

d. (π) est orthogonal à la droite (OB) ; toute droite de ce plan, en particulier la droite (PM) est orthogonale à la droite (OB) .
La droite (MP) est orthogonale à la droite (AC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{MP}\left(\dfrac{k}{2}\ ;\ 6 - \dfrac{3k}{4}\ ;\ 0\right)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(4\ ;\ -6\ 8)$.
$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0 \iff 4 \times \dfrac{k}{2} - 6\left(6 - \dfrac{3k}{4}\right) = 0 \iff 8k - 144 + 18k = 0 \iff 26k = 144 \iff \dfrac{144}{26} = \dfrac{72}{13}$.

On vérifie que $\dfrac{0}{13} < \dfrac{72}{13} < \dfrac{104}{13} = 8$.

e. On calcule $MP^2 = \dfrac{k^2}{4} + \left(6 - \dfrac{3k}{4}\right)^2 = \dfrac{k^2}{4} + 36 + \dfrac{9k^2}{16} - 9k = \dfrac{13k^2}{16} - 9k + 36$.

Le minimum de ce trinôme en k est obtenu pour la valeur $k = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{9}{2 \times \frac{13}{16}} = \dfrac{72}{13}$. (donc quand la droite (MP) est orthogonale à la droite (AC).)

Problème **10 points**

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$. Or :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 1 - 1 = (x-1)^2 - 2 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$. Ce trinôme est positif sauf entre ses racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.
Conclusion : $f(x) > 0$ sur $[-1~;~1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}~;~+\infty[$ et
$f(x) < 0$ sur $]1 - \sqrt{2}~;~1 + \sqrt{2}[$.
Signe de $f(x)$: l'exponentielle désignant un réel supérieur à zéro le signe de $f(x)$ est celui de $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$ qui est négatif sauf entre -1 et 1.
$\boxed{\text{Donc } f(x) < 0 \text{ sauf sur }]-1~;~1[.}$

 b. f produit de fonctions dérivables est dérivable et
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x - 1 + x^2\right)$.
$f'(x)$ est donc du signe de $x^2 - 2x - 1$ dont on vient de déterminer le signe.
On en déduit les variations de f :

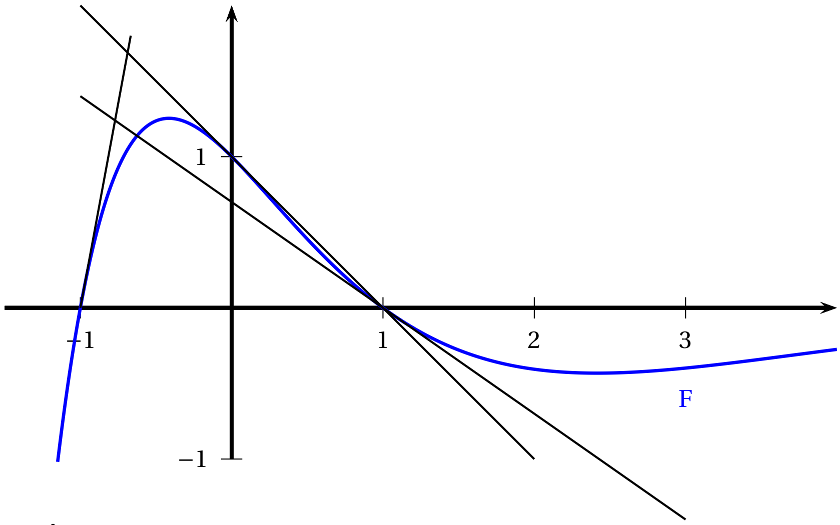
x	-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\nearrow$	0

Le maximum est $f(1 - \sqrt{2}) = \left[1 - (1 - \sqrt{2})^2\right]\mathrm{e}^{-(1-\sqrt{2})} = (-2 + 2\sqrt{2})\mathrm{e}^{\sqrt{2}-1}$;
Le minimum est $f(1 + \sqrt{2}) = \left[1 - (1 + \sqrt{2})^2\right]\mathrm{e}^{-(1+\sqrt{2})} = (-2 - 2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}-1}$.

3. Équation de la tangente note (T) à la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0 : si $x = 0$, $f(0) = 1$.
Une équation de (T) est $= y - 1 = f'(0)(x - 0)$; or $f'(0) = -1$. Une équation de (T) est donc $y = -x + 1$.

4. **a.** Les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en B(1 ; 0) et C$(-1~;~0)$ sont les nombres dérivés $f'(1)$ et $f'(-1)$.
$\boxed{\begin{array}{l} f'(1) = \mathrm{e}^{-1}(1 - 1 - 2) = -2\mathrm{e}^{-1} \approx -0,7. \\ f'(-1) = \mathrm{e}^{1}(1 + 2 - 1) = 2\mathrm{e} \approx 5,4. \end{array}}$

 b.



Partie B
Intégrales et aires

1. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour x réel positif.

   Posons $\left\{\begin{array}{lllllll} u(t) & = & 1-t^2 & & u'(t) & = & -2t\\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & vt() & = & -\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$ Donc, toutes ces fonctions étant dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x - 2\int_1^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   On pose à nouveau :

   $\left\{\begin{array}{lllllll} u(t) & = & t & & u'(t) & = & 1\\ v't() & = & -\mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$, on intègre à nouveau par parties et

   $\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \left[-\left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x - 2\left[t\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x + 2\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t} + 2t\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x =$
   $\left[\mathrm{e}^{-t}\left(t^2+2t+1\right)\right]_1^x = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

2. Pour $x = 0$, cette intégrale vaut $1 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

   $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\left(1-\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{4}{\mathrm{e}} - 1$. (cette aire est effectivement positive)

3. Pour $u \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^u f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'opposée de l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ car $f(t) < 0$.

   Donc $\mathcal{A}_1(u) = -\displaystyle\int_1^u f(t)\,\mathrm{d}t = -\left((u+1)^2\mathrm{e}^{-u} - \dfrac{4}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{4}{\mathrm{e}} - (u+1)^2\mathrm{e}^{-u}$.

   Comme $\lim\limits_{u\to+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u} = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathcal{A}_1(u) == \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

   Graphiquement ceci signifie que l'aire de la surface infinie limitée par l'axe des abscisses, la courbe et la droite d'équation $x = 1$ est finie et tend vers $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

4. **a.** $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A} \iff \dfrac{4}{\mathrm{e}} - (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{4}{\mathrm{e}} - 1 \iff (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} = 1 \iff$ $2\ln(x+1) - x = 0 \iff 2\ln(x+1) = x$.

   b. h définie par $h(x) = x - 2\ln(1+x)$ est dérivable et

   $h'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+x} = \dfrac{1+x-2}{1+x} = \dfrac{x-1}{x+1}$ qui est du signe de $x-1$ donc positive car on suppose que $x \geqslant 1$. La fonction h est donc croissante de $h(1) = 1 - 2\ln 2 < 0$ à $+\infty$ (il suffit de factoriser x dans l'écriture de h).

Par continuité cette fonction s'annule une seule fois sur $[1\ ;\ +\infty[$ en α tel que $\alpha = 2\ln(1+\alpha)$.

On a $h(2) = 2 - 2\ln 3 \approx -0,197$ et $h(3) = 3 - 2\ln 4 \approx 0,227$.

Conclusion : $2 < \alpha < 3$.

c. On obtient grâce à la calculatrice :

$h(2,5) \approx -0,05$ et $h(2,6) \approx 0,03$.

$h(2,51) \approx -0,001$ et $h(2,52) \approx 0,003$

$h(2,512) \approx -0,0003$ et $h(2,513) \approx 0,00005$.

Donc finalement à 10^{-3} près $2,512 < \alpha < 2,513$.

Comme $\alpha = 2\ln(1+\alpha) = \ln(1+\alpha)^2 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = (1+\alpha)^2$.

Donc $f(\alpha) = \left(1-\alpha^2\right)e^{-\alpha} = \dfrac{\left(1-\alpha^2\right)}{\mathrm{e}^{\alpha}} = \dfrac{\left(1-\alpha^2\right)}{(1+\alpha)^2} = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

En partant de : $2,512 < \alpha < 2,513 \iff -2,513 < -\alpha < -2,512 \iff -1,513 < 1-\alpha < -1,512 \quad (1)$

et de $2,512 < \alpha < 2,513 \iff 3,512 < 1+\alpha < 3,513 \iff$

$\dfrac{1}{3,153} < \dfrac{1}{1+\alpha} < \dfrac{1}{3,512}$ (2) et en multipliant membre à membre (1) et (2), on obtient :

$-\dfrac{1,513}{3,513} < f(\alpha) < -\dfrac{1,512}{3,512}$.

Or $-0,4307 < -\dfrac{1,513}{3,513}$ et $-\dfrac{1,512}{3,512} < -0,4305$.

Donc $\boxed{-0,4307 < f(\alpha) < -0,4305}$ qui est un encadrement à 2×10^{-4}.