Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2006

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. En posant $u(t) = 5t$ et $v'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, on a :
$u'(t) = 5$ et $v(t) = \ln\left(1+t^2\right)$, car quel que soit t réel, $1+t^2 \geqslant 1 > 0$. On obtient donc en intégrant par parties (toutes les fonctions étant continues) :
$\text{I} = \left[5t \times \ln\left(1+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 5\ln\left(1+t^2\right)\,\text{d}t = \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - 5\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+t^2\right)\,\text{d}t.$

2. Soient $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   a. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et
   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{1-\left(1-x^2\right)}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$, car $1+x \geqslant 1 > 0$ et $x^2 \geqslant 0$.
   La fonction f est donc croissante à partir de $\ln(1) - 0 + 0 = 0$: elle est donc positive.
   Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$.
   On admet de même que pour $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$.

   b. On déduit de la question précédente que :
   $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0 \iff x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$ et que
   $\ln(1+x) - x \leqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x$ soit
   $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$
   En écrivant cet encadrement avec $x = t^2$ (puisque $x \geqslant 0$), on obtient l'encadrement :
   $$t^2 - \frac{t^4}{2} \leqslant \ln\left(1+t^2\right) \leqslant t^2.$$

   c. En intégrant les trois fonctions précédentes sur $\left[0 ;\, \frac{1}{2}\right]$, on obtient :
   $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 5\left(t^2 - \frac{t^4}{2}\right)\text{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 5\ln\left(1+t^2\right)\,\text{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 5t^2\,\text{d}t \iff []_0^{\frac{1}{2}} \iff$
   $\left[\dfrac{5t^3}{3} - \dfrac{t^5}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 5\ln\left(1+t^2\right)\,\text{d}t \leqslant \left[\dfrac{5t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} \iff$
   $\dfrac{5}{24} - \dfrac{1}{64} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 5\ln\left(1+t^2\right)\,\text{d}t \leqslant \dfrac{5}{24}$ et finalement en prenant les opposés :
   $$-\frac{5}{24} \leqslant -5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+t^2\right)\,\text{d}t \leqslant -\frac{37}{192}$$

3. On déduit de la question 1. et de la question 2. c. que
$$\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{5}{24} \leqslant \text{I} \leqslant \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{37}{192} \text{ soit}$$
$$0,349 \leqslant \text{I} \leqslant 0,366$$

Partie B

1. $\varphi(0)$ est l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle d'amplitude nulle : donc $\varphi(0) = 0$.

   Par définition de l'intégrale $\varphi(t) = \dfrac{10t^2}{1+t^2}$.

2. Avec $y_{n+1} = y_n + \varphi'(x_n) \times 0,1$ et $x_n = \dfrac{n}{10}$, on obtient $y_{n+1} = y_n + \dfrac{10 \times \frac{n^2}{100}}{1 + \frac{n^2}{100}} \times 0,1$,

   soit $y_{n+1} = y_n + \dfrac{n^2}{100+n^2}$.

3. À partir de $y_0 = 0$ et grâce à la formule de récurrence obtenue ci-dessus, on peut calculer $y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{1}{101}$. Puis $y_3 = \dfrac{1}{101} + \dfrac{4}{104}$, $y_4 = \dfrac{1}{101} + \dfrac{4}{104} + \dfrac{9}{109}$ et
   $y_5 = \dfrac{1}{101} + \dfrac{4}{104} + \dfrac{9}{1096} + \dfrac{16}{116}$.
   $y_5 \approx 0,269$ à $0,001$ près.

4. La valeur trouvée pour I par la méthode d'Euler avec un pas de 0, est incompatible avec l'encadrement trouvé à la question A. 3.

   La valeur $0,354$ trouvée par la méthode d'Euler et un pas de $0,01$ est compatible avec l'encadrement précité. (En fait I $\approx 0,364$)

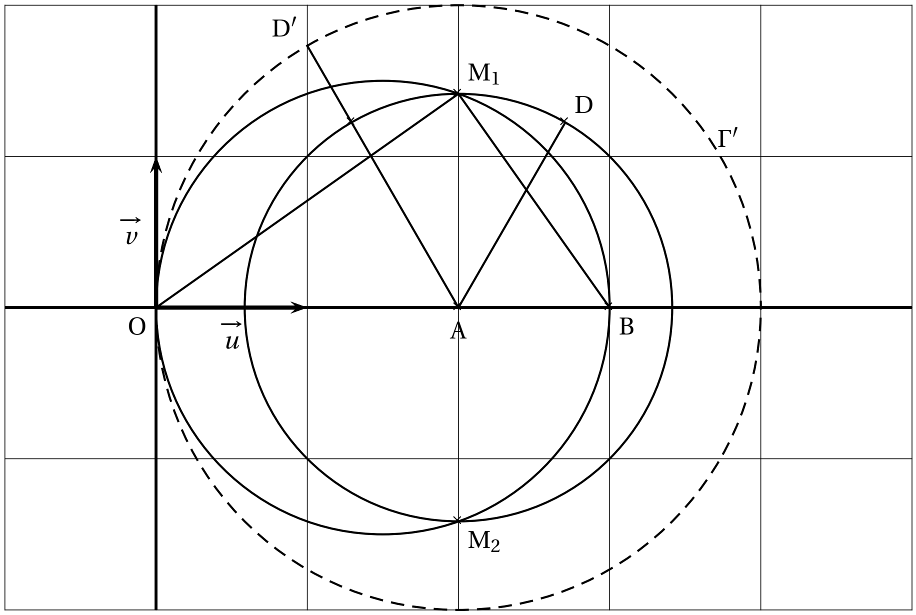
EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Résolution de $z^2 - 4z + 6 = 0 \iff (z-2)^2 - 4 + 6 = 0 \iff (z-2)^2 + 2 = 0 \iff (z-2)^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 = 0 \iff \left(z - 2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) = 0 \iff$
   $\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 2 - \mathrm{i}\sqrt{2} \\ z & = & 2 + \mathrm{i}\sqrt{2}. \end{array}\right.$

   $$S = \{2 - \mathrm{i}\sqrt{2}\ ;\ 2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\}$$

   b. Le quotient $\dfrac{z_1 - 3}{z_1} = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2 + \mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{(-1 + \mathrm{i}\sqrt{2})(2 - \mathrm{i}\sqrt{2})}{4+2} = \dfrac{-2 + 2 + \mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}}{6} = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C'est donc un imaginaire pur. On déduit de l'égalité $\dfrac{z_1 - 3}{z_1} = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:
   en prenant les arguments $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM_1}},\ \overrightarrow{\mathrm{BM_1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui signifie que le triangle $\mathrm{OBM_1}$ est rectangle en $\mathrm{M_1}$.

   c. Le triangle précédent est inscrit dans un cercle de diamètre [OB]. Or z_1 et z_2 étant conjugués, les points $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ sont symétriques autour de $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u}\right)$: le point $\mathrm{M_2}$ appartient lui aussi au cercle circonscrit au triangle $\mathrm{OBM_1}$.



2. $z' = z^2 - 4z + 6$.

a. On a $z' - 2 = z^2 - 4z + 6 - 2 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$..

b. Si $z = 2 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on vient de démontrer que $z' - 2 = (z-2)^2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}$, d'où $|z'-2| = 2$ et $\arg\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AM}'}\right) = 2\theta$.

Conclusion : M′ appartient au cercle de centre A(2 ; 0) et de rayon 2.

3. D est le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}}{2}$

a. $d - 2 = \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que $|d-2| = \sqrt{2}$ c'est-à-dire que D appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, soit au cercle Γ.

b. D'après la question 2. b. un argument de D étant $\frac{\pi}{3}$, un argument de D′ est $2\frac{\pi}{3} = \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}'}\right)$.

D′ est le point de Γ' tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}'}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

c. On a AO = AD′ = 2 et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}'},\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}'}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

Les mesures des trois angles de OAD′ sont égales à $\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion : le triangle OAD′ est équilatéral.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A R. O. C. sur la loi de durée de vie sans vieillissement.

Partie B

1. a. De $p(\mathrm{T} \leqslant 10) = \displaystyle\int_0^{10} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0,7$

$iff \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{10} = 0,7 \iff -\mathrm{e}^{-10\lambda} + 1 = 0,7 \iff \mathrm{e}^{-10\lambda} = 0,3$, on en déduit par croissance de la fonction ln, $-10\lambda = \ln 0,3 \iff \lambda = -\dfrac{\ln 0,3}{10} \approx 0,1203$.

Désormais $\lambda \approx 0,12$.

b. Par définition de la probabilité conditionnelle :
$p_{(T>10)}(T>15) = \dfrac{p(T>10)\cap p(T>15)}{p(T>10)} = \dfrac{p(T>15)}{p(T>10)} = \dfrac{1-\left[e^{-0,12t}\right]_0^{15}}{0,3} =$
$\dfrac{e^{-0,12\times 15}}{0,3} \approx 0,550.$

c. D'après la partie A, la probabilité cherchée est
$p(T \leqslant 5) = \left[e^{-0,12t}\right]_0^5 = 1 - e^{-0,6}$.
La probabilité est d'environ $0,451 \approx 0,45$.

2. a. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 6$ et $p = 0,3$.

b. On a $p(Y \geqslant 4) = p(Y=4) + p(Y=5) + p(Y=6) =$
$\binom{6}{4}0,3^4 \times 0,7^2 + \binom{6}{5}0,3^5 \times 0,7^1 + \binom{6}{6}0,3^6 \times 0,7^0 =$
$15 \times 0,3^4 \times 0,7^2 + 6 \times 0,3^5 \times 0,7 + 0,3^6 \approx 0,070.$
La probabilité d'ouvrir de nouvelles caisses est d'environ $0,07$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 4 — 5 points

Enseignement obligatoire

1. a. Dans le repère donné les coordonnées de D, I, F et J sont

$$D(0\,;\,1\,;\,0)\quad I(1/2\,;\,0\,;\,0)\quad F(1\,;\,0\,;\,1)\quad J(1/2\,;\,1\,;\,1)$$

Donc $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\0\end{pmatrix}$.
On a $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JF} \iff$ DIFJ est un parallélogramme.
Calculons $DI^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ et $IF^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. Conclusion : DI = IF.
Le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est un losange.
L'aire de losange est par exemple : $\dfrac{DF \times IJ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b. Soit un vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ normal au plan (DIJ) ; il est normal au vecteur $\overrightarrow{DI}(1/2\,;\,-1\,;\,0)$ et au vecteur $\overrightarrow{IJ}(0\,;\,-1\,;\,-1)$ ce qui entraîne $\begin{cases}\frac{a}{2} - b &= 0\\ -b-c &= 0\end{cases} \iff$

$\begin{cases} a &= 2b\\ b &= -c.\end{cases}$ Le vecteur de coordonnées $(-2c\,;\,-c\,;\,c)$est normal au plan (DIJ) ; en particulier $\overrightarrow{n}(2\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal à ce plan.
On en déduit qu'une équation du plan (DIJ) est $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DIJ) \iff 2x + y - z + d = 0$.
En particulier $I(1/2\,;\,0\,;\,0) \in (DIJ) \iff 2 \times \frac{1}{2} + 0 - 0 + d = 0 \iff d = -1$.
Une équation du plan (DIJ) est donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DIJ) \iff 2x + y - z - 1 = 0.$$

c. On sait $d(E, (DIJ)) = \dfrac{\left|2x_E + y_E - z_E - 1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|-2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Il en résulte que le volume de la pyramide EDIFJ est égal à :
$\dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(DIFJ) \times h$, h étant la distance de E au plan calculée ci-dessus. Donc
$V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{1}{3}$.

2. **a.** Δ est donc la droite contenant E et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{E}M} = t\,\overrightarrow{n}$. En égalant les coordonnées de ces deux vecteurs, on obtient :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2t \\ y &=& t \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$$

qui est une représentation paramétrique de la droite Δ.

$\mathrm{K}(1\,;\,1/2\,;\,1/2) \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{rcr} 1 &=& 2t \\ 1/2 &=& t \\ 1/2 &=& 1-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} 1/2 &=& 2t \\ 1/2 &=& t \\ t &=& 1/2 \end{array}\right.$ ce qui est cohérent.

b. Le point commun à Δ et à (DIJ) (unique car Δ est perpendiculaire à (DIJ)) a ses coordonnées qui vérifient les équations de la droite et l'équation du plan, donc $2 \times 2t + t - 1 + t - 1 = 0 \iff 6t - 2 = 0 \iff t = \dfrac{1}{3}$.
D'où L$(2/3\,;\,1/3\,;\,2/3)$.

c. On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{LB}} + \overrightarrow{\mathrm{LE}} + \overrightarrow{\mathrm{LG}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On a bien $\overrightarrow{\mathrm{LB}} + \overrightarrow{\mathrm{LE}} + \overrightarrow{\mathrm{LG}} = \overrightarrow{0} \iff$ L est l'isobarycentre ou centre de gravité de (BEG)

3. **a.** $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{S} \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \dfrac{4}{3} = 0 \iff (x-1)^2\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{3} = 0 \iff (x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{6}$ qui est l'équation d'une sphère de centre le point de coordonnées $(1\,;\,1/2\,;\,1/2)$ c'est-à-dire le point K et de rayon $\sqrt{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

b. On a L$(2/3\,;\,1/3\,;\,2/3) \in \mathscr{S} \iff \left(\dfrac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{6} \iff \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6} \iff \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ qui est vraie.
Conclusion L est un point de Δ, du plan (DIJ), du plan (BEG) et de la sphère $\mathscr{S}$.
Comme (KL) est perpendiculaire au plan (DIJ) et que KL est égal au rayon de la sphère, il en résulte que le plan (DIJ) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$ au point L.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** D'après le cours il existe une unique similitude directe qui transforme deux points distincts en deux points distincts.

b. On sait que l'écriture complexe de s est : $z' = az + b$, a et b étant deux complexes que l'on détermine en écrivant que $s(\mathrm{O}) = \mathrm{I}$ et $s(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$, soit :
$\left\{\begin{array}{lcl} 1+\mathrm{i} &=& a \times 0 + b \\ 2\mathrm{i} &=& a + b \end{array}\right. \Rightarrow a = \mathrm{i} - 1$ (par différence), et $b = 1 + \mathrm{i}$.
L'écriture complexe est donc $z' = (\mathrm{i} - 1)z + 1 + \mathrm{i}$.
Recherche de points fixes : si z a pour image $z = (\mathrm{i} - 1)z + 1 + \mathrm{i}$, alors $z(2 - \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} \iff z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{4+1} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{5}$. La similitude a un seul point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{1}{5} + \mathrm{i}\dfrac{3}{5}$.

c. On a $A\Omega^2 = |\omega - 1|^2 = \left(\dfrac{-4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16+9}{25} = 1 \Rightarrow A\Omega = 1$.
Conclusion $A\Omega = AO = 1$, donc Ω appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1.

2. $f : z \longmapsto z' = \dfrac{-3-4\text{i}}{5}\overline{z} + \dfrac{8+4\text{i}}{5}$.

a. $z_{A'}$ désignant l'affixe de l'image par f de A, $z_{A'} = \dfrac{-3-4\text{i}+8+4\text{i}}{5} = \dfrac{5}{5} = 1 = z_A$.
A est un point invariant par f.
De même $z_{C'} = \dfrac{-3-4\text{i}}{5} \times (-2\text{i} + \dfrac{8+4\text{i}}{5} = \dfrac{6\text{i}-8+8+4\text{i}}{5} = \dfrac{10\text{i}}{5} = 2\text{i} = z_C$.
C est également un point invariant par f.
D'après l'écriture complexe $\left(\left|\dfrac{-3-4\text{i}}{5}\right| = 1\right)$, f est une similitude indirecte ayant deux points fixes : c'est donc une symétrie-droite autour de la droite (AC).
Image de Ω par f :
$z_{\Omega'} = \left(\dfrac{-3-4\text{i}}{5}\right)\left(\dfrac{1-3\text{i}}{5}\right) + \dfrac{8+4\text{i}}{5} = \dfrac{-3+9\text{i}-4\text{i}-12+40+20\text{i}}{25} = \dfrac{25+25\text{i}}{25} = 1+\text{i} = z_I$.
I est donc l'image de Ω par f.

b. cf. figure

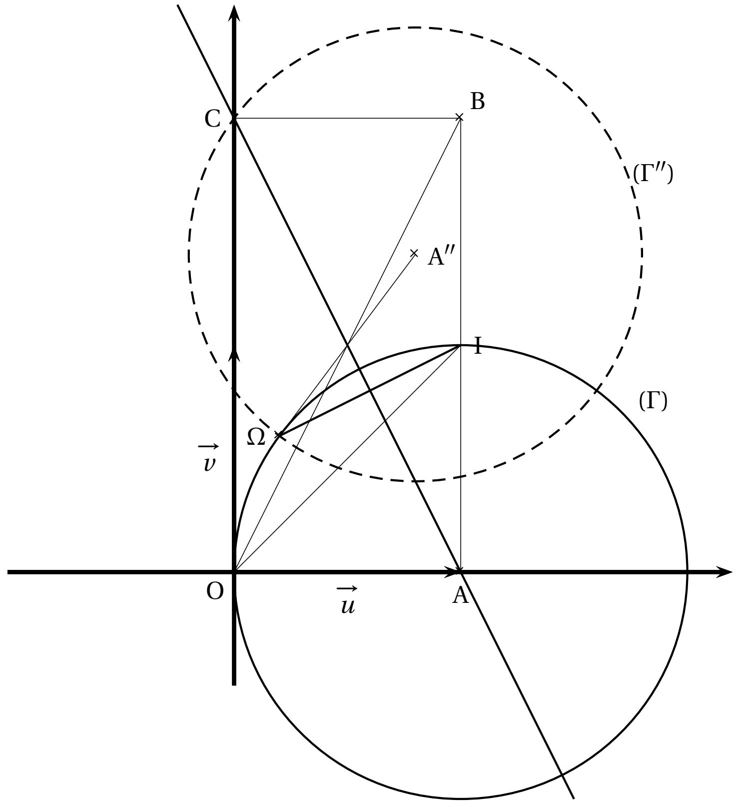
3. À tout point M on associe M′ et M″ tels que $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$.

a. Si $M = \Omega$, alors $\overrightarrow{\Omega'\Omega''} = \overrightarrow{\Omega\Omega} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \Omega' = \Omega'' = \Omega$ (car Ω est invariant par s.

b. Construction de A″ : on a par définition $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{\Omega A} \iff \overrightarrow{CA''} = \overrightarrow{\Omega A} \iff \Omega AA''C$ est un parallélogramme.
On peut construire A″ en utilisant les diagonales du parallélogramme ou les côtés opposés de même longueur.

c. L'égalité $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$ se traduit en termes d'affixes par
$z'' - z' = z - z_\Omega \iff z'' = (\text{i}-1)z + 1 + \text{i} + z - \dfrac{1+3\text{i}}{5} = \text{i}z + \dfrac{4+2\text{i}}{5}$.
Recherche de points invariants : on résout $z = \text{i}z + \dfrac{4+2\text{i}}{5}$
$\iff z(1-\text{i}) = \dfrac{4+2\text{i}}{5} \iff z = \dfrac{(4+2\text{i})((1+\text{i})}{5(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{1+3\text{i}}{5} = z_\Omega$.
On obtient par différence : $z" - \dfrac{1+3\text{i}}{5} = \text{i}\left(z - \dfrac{1+3\text{i}}{5}\right)$ qui est l'écriture complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct).

d. L'ensemble (Γ'') est l'image par cette rotation du cercle (Γ) : c'est donc un cercle de même rayon et dont le centre est l'image par le quart de tour du point A.



B
C
(Γ″)
A″
I
(Γ)
Ω
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$
A