Proposition de correction

Sujet de Bac S, Polynésie juin 2001

Exercice 1. *(Enseignement obligatoire et de spécialité)*

Soit la fonction f de $\mathcal{P}$ privée du point A dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = f(z) = \mathrm{i}\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{z+1}\right) \qquad (1)$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2-\mathrm{i}$. Montrons qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.

Notons z_D l'affixe du point D. On cherche alors z_D tel que $z_C = f(z_D)$, c'est-à-dire, avec l'équation (**? ?**) :

$$2-\mathrm{i} = \mathrm{i}\left(\frac{z_D-3\mathrm{i}}{z_D+1}\right) \iff (2-\mathrm{i})(z_D+1) = \mathrm{i}(z_D-3\mathrm{i})$$

Ou encore :

$$2z_D + 2 - \mathrm{i}z_D - \mathrm{i} = \mathrm{i}z_D + 3$$

C'est-à-dire :

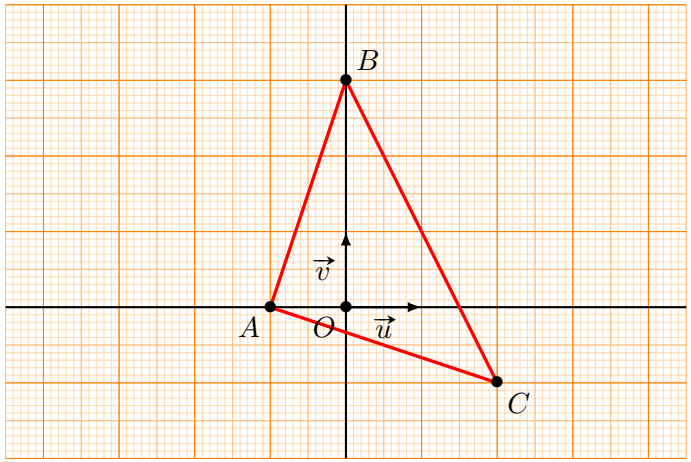
$$2z_D + 2 - \mathrm{i}z_D - \mathrm{i} - \mathrm{i}z_D - 3 = 0 \iff 2(1-\mathrm{i})z_D = 1+\mathrm{i}$$

D'où, en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$z_D = \frac{1+\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i})} = \frac{1}{2}\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}}{4}$$

D'où finalement : $\boxed{z_D = \frac{1}{2}\mathrm{i}}$.

2. Réalisons une figure pour pouvoir conjecturer la nature du triangle ABC :



Conjecture : il semblerait que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A. Prouvons-le.

- ***ABC* isocèle**. Calculons les distance AB et AC. On a, d'une part :

$$AB = |z_B - z_A| = |3\mathrm{i}+1| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

D'autre part :

$$AC = |z_C - z_A| = |2-\mathrm{i}+1| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$$

On a donc $AB = AC$, le triangle ABC est donc isocèle en A.

- ***ABC* rectangle**. Calculons l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Par propriété :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\frac{3-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\right) = \arg\left(\frac{-\mathrm{i}(3\mathrm{i}+1)}{1+3\mathrm{i}}\right)$$

D'où :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

En conclusion, on a montré notre conjecture et le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

3. Remarquons que, pour $z \neq -1$, on a :

$$(1) \iff z' - 0 = \frac{\mathrm{i}(z - z_B)}{z - z_A}$$

Prenons les modules de l'ensemble de cette égalité. Par propriété des modules, on obtient :

$$|z' - z_O| = \left|\frac{\mathrm{i}(z - z_B)}{z - z_A}\right| = \frac{|i||z - z_B|}{|z - z_A|} = \frac{|z - z_B|}{|z - z_A|}$$

Autrement écrit, on a donc : $\boxed{OM' = \dfrac{BM}{AM}}$.

Prenons maintenant les arguments de l'ensemble de l'égalité. Par propriété des arguments, on obtient :

$$\arg(z' - z_O) = \arg\left(\frac{\mathrm{i}(z - z_B)}{z - z_A}\right) = \arg(\mathrm{i}) + \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right)$$

Autrement écrit, on a donc : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)$ ou encore :

$$\boxed{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$$

4. **a.** M' étant située sur le cercle (F) de centre O, alors $OM' = 1$. De la première relation précédente, on déduit :

$$\frac{BM}{AM} = 1 \iff AM = BM$$

L'ensemble E des points M du plan, tel que les images M' soient situées sur le cercle (F) de centre O, est donc la $\boxed{\text{médiatrice du segment } [AB]}$.

b. L'affixe de M' est réelle signifie que l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [\pi]$. De la seconde relation précédente, on déduit :

$$\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0\ [\pi] \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

L'ensemble F des points M du plan, tel que l'affixe des images M' soient réelle, est donc le $\boxed{\text{cercle de diamètre } [AB], \text{ privé des points } A \text{ et } B}$.

5. L'affixe z' d'un point M' obtenu par rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ d'un point $M(z)$ s'écrit :

$$z' - 0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - 0) \iff z' = \mathrm{i}z$$

a. C_1 étant l'image de C par R, son affixe se calcule donc comme suit :

$$z_{C_1} = \mathrm{i}z_C \iff z_{C_1} = \mathrm{i}(2 - \mathrm{i})$$

D'où : $\boxed{z_{C_1} = 1 + 2\mathrm{i}}$.

b. Notons I le milieu du segment $[AB]$. Alors $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-1 + 3\mathrm{i}}{2}$

Calculons IC_1 :

$$IC_1 = |z_{C_1} - z_I| = \left|1 + 2\mathrm{i} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right|$$

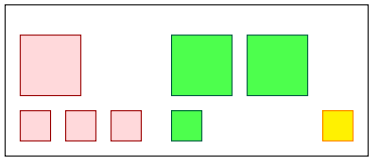
Soit :

$$IC_1 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

On vient donc de montrer que $IC_1 = \dfrac{AB}{2}$, ce qui prouve que $C_1 \in F$.

Exercice 2. *(Enseignement obligatoire)*

En guise de préambule, réalisons un petit schéma visuel :



Déterminons le nombre total N de tirages possibles. Cette quantité va nous permettre de calculer les probabilités demandées dans l'exercice. L'ordre n'important pas ici, le nombre total de tirages simultanés est le nombre de combinaisons de 3 cubes parmi les 8 disponibles. Ainsi :

$$N = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

L'univers Ω associé à cette expérience est tel que : $\mathrm{Card}(\Omega) = 56$.

1. Soit donc l'événement A : « Obtenir des cubes de couleurs différentes ».

a. Comme précisé, la boîte contient 8 cubes et le tirage d'un cube ne dépend ni de sa taille, ni de sa couleur. En d'autres termes, tous les cubes ont la même probabilité d'être tirés de la boîte. Par ailleurs, l'ordre n'intervient pas dans cette expérience.

Il suffit donc, pour déterminer $\mathbb{P}(A)$, de dénombrer tous les tirages favorables, c'est-à-dire $\text{Card}\,(A)$. On aura alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)}$$

Dans un tirage, élément de A, on a donc : 1 cube rouge, 1 cube vert et 1 cube jaune.

- Il y a donc $\binom{4}{1} = 4$ possibilités pour le cube rouge
- Il y a donc $\binom{3}{1} = 3$ possibilités pour le cube vert.
- Il n'y a qu'un seule possibilité pour le cube jaune.

L'ensemble A comporte donc $4 \times 3 \times 1 = 12$ éléments : $\text{Card}\,(A) = 12$. On en déduit donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

Ainsi : $\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{3}{14} = 21,43\%}$.

b. On a l'événement B : « Obtenir au plus un petit cube ». Autrement dit, soit le tirage contient un petit cube, soit pas. Notons alors :

- B_1 l'événement « Obtenir exactement un petit cube »
- B_2 l'événement « Obtenir aucun petit cube »

B_1 et B_2 sont incompatibles et donc $B_1 \cup B_2 = B$ et $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Dès lors, par propriété :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \frac{\text{Card}\,(B_1) + \text{Card}\,(B_2)}{\text{Card}\,(\Omega)}$$

Il n'y a qu'une seule possibilité d'obtenir aucun petit cube (c'est de tirer les 3 gros cubes). Donc $\text{Card}\,(B_2) = 1$.

La boîte contient 3 gros cubes et 5 petits cubes.

- Il y a donc $\binom{5}{1} = 5$ possibilités d'obtenir exactement un petit cube dans le tirage.
- Il y a donc $\binom{3}{2} = 3$ possibilités d'obtenir deux gros cubes dans le tirage.

L'ensemble B_2 comporte donc $5 \times 3 = 15$ éléments : $\text{Card}\,(B_1) = 15$. On en déduit donc :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{15+1}{56} = \frac{16}{56} = \frac{2 \times 8}{7 \times 8}$$

Soit finalement : $\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{2}{7}}$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a. Vu que l'enfant tire 3 cubes simultanément, il peut donc avoir soit 1, soit 2, soit 3 soit aucun petit cube rouge dans sa main. Ainsi :

$$X = \{0\,;1\,;2\,;3\}$$

On cherche donc à déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0\,;1\,;2\,;3\}$. Pour obtenir k petits cubes rouges, il faut tirer simultanément :

- k petits cubes rouges parmi les 3 disponibles, soit $\binom{3}{k}$ possibilités.
- $3-k$ autres cubes parmi les 5 restants, soit $\binom{5}{3-k}$ possibilités.

On déduit alors :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \times \binom{5}{3-k}}{56} = \frac{\frac{3!}{k!(3-k)!} \times \frac{5!}{(3-k)!(5-3+k)!}}{56}$$

Ou encore :

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{3!\times 5!}{56\times k!\times(2+k)!\times\big((3-k)!\big)^2}$$

Il ne reste plus qu'à finaliser les calculs :

- Pour $k=0$:

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{3!\times 5!}{56\times 2!\times\big(3!\big)^2}=\frac{5\times 4\times 3!}{56\times 2\times 3!}=\frac{5\times 4}{28\times 4}=\frac{5}{28}$$

- Pour $k=1$:

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{3!\times 5!}{56\times 3!\times\big(2!\big)^2}=\frac{5\times 4\times 3}{56\times 2}=\frac{15\times 4}{28\times 4}=\frac{15}{28}$$

- Pour $k=2$:

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{3!\times 5!}{56\times 2!\times 4!\times\big(1!\big)^2}=\frac{3\times 5}{56}=\frac{15}{56}$$

- Pour $k=3$, pas besoin de faire de calculs, puisque il n'y qu'une seule chance que le tirage comporte trois petits cubes rouges. Donc :

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{56}$$

D'où la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

b. L'espérance mathématique de X se calcule par :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{3}k\mathbb{P}(X=k)$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}$$

Soit $\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{9}{8}}$.

3. **a.** Quand l'enfant tire 3 cubes, soit il y a au plus un petit cube, soit ce n'est pas le cas. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois que l'événement B est réalisé. Ainsi, la probabilité que B au moins une fois vaut :

$$P_n=\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y<1)=1-\mathbb{P}(Y=0)$$

On a une succession de n expériences aléatoires identiques et indépendantes, Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p=\mathbb{P}(B)$. La probabilité que l'événement B se réalise k fois vaut, par propriété :

$$\mathbb{P}(Y=k)=\binom{n}{k}\big(\mathbb{P}(B)\big)^k\big(1-\mathbb{P}(B)\big)^{n-k}$$

En particulier, pour $k=0$:

$$\mathbb{P}(Y=0)=\binom{n}{0}\big(\mathbb{P}(B)\big)^0\big(1-\mathbb{P}(B)\big)^{n-0}=\left(\frac{5}{7}\right)^n$$

D'où : $\boxed{P_n=\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\left(\frac{5}{7}\right)^n}$.

b. On cherche n tel que $P_n\geqslant 0,99$, c'est-à-dire $1-\left(\frac{5}{7}\right)^n\geqslant 0,99$.

S'en suit :

$$\left(\frac{5}{7}\right)^n\leqslant 0,01\iff\ln\left(\frac{5}{7}\right)^n\leqslant\ln(0,01)\iff n\ln\left(\frac{5}{7}\right)\leqslant\ln(0,01)$$

Comme $\ln\left(\frac{5}{7}\right)<0$, on inverse le sens de l'inégalité et :

$$n\geqslant\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}$$

Comme $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}\approx 13,687$, on trouve alors $\boxed{n=14}$.

EXERCICE 2. *(Enseignement de spécialité)*

1. On considère l'équation $(\mathcal{E})$: $91x + 10y = 1$.

a. On peut écrire que $91 = 7 \times 13$ et que $10 = 2 \times 5$. La décomposition en facteurs premiers de 91 et 10 justifie que ces deux nombres sont premiers entre eux.

Ainsi, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs u et v tels que $91u + 10v = 1$. $(\mathcal{E})$ admet donc au moins une solution : le couple $(u\,;\,v)$.

b. On remarque aisément que $91 = 90 + 1 = 10 \times 9 + 1$. Donc :

$$91 \times 1 + 10 \times (-9) = 1$$

$(\mathcal{E})$ admet pour solution particulière le couple $\boxed{(1\,;\,-9)}$.

On considère l'équation $(\mathcal{E}')$: $91x + 10y = 412$. D'après ce qui précède, $91 \times 1 + 10 \times (-9) = 1$, on peut donc déduire que :

$$91 \times 412 + 10 \times (-9) \times 412 = 412$$

C'est-à-dire :

$$91 \times 412 + 10 \times (-3\,708) = 412$$

$(\mathcal{E}')$ admet pour solution particulière le couple $\boxed{(412\,;\,-3\,708)}$.

c. Effectuons un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse**. Supposons que $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(\mathcal{E}')$. D'après ce qu'on a obtenu en question précédente, on peut alors écrire :

$$91x + 10y = 412 \Longleftrightarrow 91x + 10y = 91 \times 412 + 10 \times (-3\,708)$$

C'est-à-dire :

$$91(x - 412) = 10(-y - 3\,708) \qquad (2)$$

x étant un entier relatif, 91 divise $91(x - 412)$. D'après l'égalité (**? ?**), 91 divise donc $10(-y - 3\,708)$. Comme 91 et 10 sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauss, que 91 divise $(-y - 3\,708)$. Ainsi, par définition :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ -y - 3\,708 = 91k \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = -3\,708 - 91k$$

En reportant cette expression dans l'égalité (**? ?**), on obtient, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$91(x - 412) = 10 \times 91k \Longleftrightarrow x = 412 + 10k$$

On a donc montré que si $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(\mathcal{E}')$, alors :

$$x = 412 + 10k \quad \text{et} \quad y = -3\,708 - 91k$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

- **Synthèse**. Supposons que $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs de la forme $x = 412 + 10k$ et $y = -3\,708 - 91k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$91x + 10y = 91(412 + 10k) + 10(-3708 - 91k) = 91 \times 412 - 10 \times (-3708) = 412$$

Donc $(x\,;\,y)$ est une solution de l'équation $(\mathcal{E}')$.

Conclusion. On a démontré que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}')$ est donc l'ensemble des couples :

$$\boxed{(412 + 10k\,;\,-3\,708 - 91k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

2. On a : $3^2 = 9$, donc $3^2 \equiv 1\ [8]$. Ainsi, par propriété, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(3^2\right)^n \equiv 1^n\ [8] \Longleftrightarrow 3^{2n} - 1 \equiv 0\ [8]$$

Ce qui signifie que $\boxed{A_n \text{ est divisible par } 8}$.

3. On considère l'équation $(\mathcal{E}'')$: $A_3x + A_2y = 3\,296$.

a. On a :

- $A_3 = 3^{2\times 3} - 1 = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$.
- $A_2 = 3^{2\times 2} - 1 = 3^4 - 1 = 81 - 1 = 80$.

Or, d'après la question précédente, on sait que A_3 et A_2 sont divisibles par 8. En remarquant que $3\,296 = 8 \times 412$, on peut donc réécrire :

$$(\mathcal{E}'') \iff 728x + 80y = 3\,296 \iff 91x + 10y = 412 \iff (\mathcal{E}')$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}'')$ est donc l'ensemble des couples :

$$\boxed{(412 + 10k\,;\ -3\,708 - 91k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

b. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour qu'un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels soit solution de $(\mathcal{E}'')$, il faut et il suffit que :

$$x = 412 + 10k \quad \text{et} \quad y = -3\,708 - 91k$$

tel que :

$$412 + 10k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -3\,708 - 91k \geqslant 0$$

C'est-à-dire, tel que :

$$k \geqslant -\frac{412}{10} \quad \text{et} \quad k \leqslant -\frac{3\,708}{91}$$

Sachant que $-\dfrac{412}{10} = -41,2$ et $-\dfrac{3\,708}{91} \approx -41,7$, et que $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$k \geqslant -41 \quad \text{et} \quad k \leqslant -41$$

Il existe donc une seule valeur de k pour laquelle le couple solution sera un couple d'entiers naturels, c'est $k = -41$. On a alors :

$$x = 412 + 10 \times (-41) = 2 \quad \text{et} \quad y = -3\,708 - 91 \times (-41) = 23$$

L'unique couple solution d'entiers naturels de $(\mathcal{E}'')$ est donc le couple $\boxed{(2\,;\,23)}$.

Problème. *(Enseignement obligatoire et de spécialité)*

On considère f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x\mathrm{e}}{x^2}$$

Pour toute la suite, on note $I =]0\,;\,+\infty[$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère g définie sur I par : $g(x) = -2\ln(x) - x\mathrm{e} + 1$.

1. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, on déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -2\ln(x) = +\infty$. Ainsi, par somme :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty}$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x) = -\infty$. Ainsi, par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

2. Soit $x \in I$. g est dérivable sur I en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur I. Ainsi :

$$g'(x) = -\frac{2}{x} - \mathrm{e}$$

$g'(x) < 0$, donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } I}$.

3. On se place sur $J = [0,5\,;\,1]$. Raisonnons par étapes :

- g est une somme de fonctions usuelles donc g est **continue** sur J.
- g est strictement décroissante sur I (d'après la question précédente), donc l'est sur J puisque $J \subset I$.
- De plus :

$$g(J) = g\big([0,5\,;\,1]\big) = \big[g(1)\,;\,g(0,5)\big] = \left[1 - \mathrm{e}\,;\,2\ln(2) - \frac{\mathrm{e}}{2} + 1\right]$$

  Donc $0 \in g(J)$ puisque $1 - \mathrm{e} < 0$ et $2\ln(2) - \dfrac{\mathrm{e}}{2} + 1 > 0$.
- **Conclusion** : d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc conclure que l'équation $\boxed{g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } J}$.

Par itérations successives, on trouve avec un pas de $0,1$:

$$\begin{cases} g(0,6) \approx 0,4 > 0 \\ g(0,7) \approx -0,2 < 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \boxed{0,6 \leqslant \alpha \leqslant 0,7}.$$

4. Pour conclure sur le signe, il suffit de se servir de la stricte décroissance de g :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in]0\,;\,\alpha],\ g(x) \geqslant 0. \\ \bullet\ \forall x \in [\alpha\,;\,+\infty[,\ g(x) \leqslant 0. \end{array}}$$

Partie B : étude de la fonction f

1. Étudions les limites de f aux bornes de I. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, on déduit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) + x\mathrm{e} = -\infty$$

Ainsi, par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$.

Pour la limite en $+\infty$, transformons notre expression de f :

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x\mathrm{e}}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\mathrm{e}}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$, et, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

Donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

2. Soit $x \in I$. f est dérivable sur I en tant que somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur I. Posons :

$\begin{cases} u(x) = \ln(x) + x\mathrm{e} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ u et v sont dérivables sur I, donc : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Ainsi, d'après les formules de dérivation, il vient :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2} = \frac{x + x^2\mathrm{e} - 2x\ln(x) - 2x^2\mathrm{e}}{x^4}$$

Ou encore, en simplifiant par x :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e} - 2\ln(x)}{x^3}$$

On en déduit donc : $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}}$.

3. Sans difficulté : $\forall x \in I$, $x^3 > 0$. f' dépend donc uniquement du signe de $g(x)$. Or, d'après la question **? ?**, on connaît le signe de g, par rapport à α.

On peut donc écrire :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est croissante sur }]0\,;\,\alpha]. \\ \bullet\ f \text{ est décroissante sur } [\alpha\,;\,+\infty[. \end{array}}$$

4. On a $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$-2\ln(\alpha) - \alpha\mathrm{e} + 1 = 0 \Longleftrightarrow \ln(\alpha) = \frac{1 - \alpha\mathrm{e}}{2}$$

Calculons alors $f(\alpha)$ en remplaçant $\ln(\alpha)$ par l'expression obtenue :

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha) + \alpha\mathrm{e}}{\alpha^2} = \frac{\dfrac{1 - \alpha\mathrm{e}}{2} + \alpha\mathrm{e}}{\alpha^2} = \frac{1 - \alpha\mathrm{e} + 2\alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$$

D'où $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}}$.

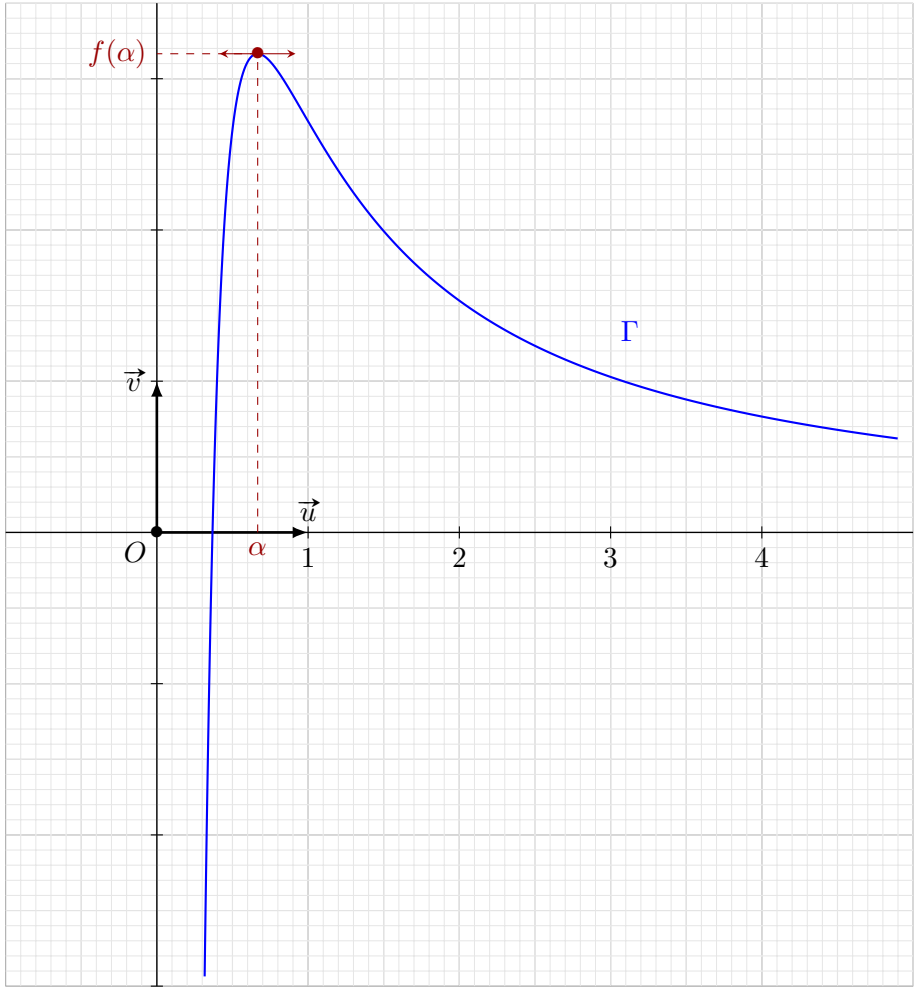
5. On déduit, de tout ce qui précède, le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1+\alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$	↘	0

6. Pour construire la courbe représentative de f, exploitons les résultats obtenus :

- D'après le tableau de variations de f obtenu en question précédente, f' s'annule en α. Donc Γ admet une tangente horizontale au point d'abscisse α.
- Des calculs de limite de f, on déduit que Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

On obtient donc la courbe suivante :



Partie C : intégrale et suite

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons, pour $t \in \left[\mathrm{e}^n\,;\,\mathrm{e}^{n+1}\right]$: $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v(t) = -\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\mathrm{e}^n\,;\,\mathrm{e}^{n+1}\right]$. Donc, pour tout $t \in \left[\mathrm{e}^n\,;\,\mathrm{e}^{n+1}\right]$:

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\underbrace{\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t}_{=I_n} = \Big[u(t)v(t)\Big]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} - \int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

En remplaçant par les expression de $u(t)$, $v(t)$, $u'(t)$ et $v'(t)$, on peut écrire que :

$$I_n = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} - \int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$I_n = -\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{n+1}\right)}{\mathrm{e}^{n+1}} + \frac{\ln\left(\mathrm{e}^n\right)}{\mathrm{e}^n} - \left[\frac{1}{t}\right]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}}$$

C'est-à-dire :

$$I_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)$$

Ou encore :

$$\boxed{I_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}}}$$

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimons A_n en remplaçant l'expression de $f(t)$:

$$A_n = \int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \left(\frac{\ln(t) + t\mathrm{e}}{t^2}\right) \mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles :

$$A_n = \int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{t\mathrm{e}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire :

$$A_n = I_n + \int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}\ln(t)\Big]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} = \mathrm{e}\big(\ln(\mathrm{e}^{n+1}) - \ln(\mathrm{e}^n)\big) = \mathrm{e}(n+1-n) = \mathrm{e}$$

D'où $\boxed{A_n = I_n + \mathrm{e}}$.

b. D'après le résultat obtenu en question **? ?**, on a :

$$I_0 = \frac{0+1}{\mathrm{e}^0} - \frac{0+2}{\mathrm{e}^{0+1}} = \frac{1}{1} - \frac{2}{\mathrm{e}}$$

Ainsi $\boxed{I_0 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}$.

De plus, d'après le résultat obtenu en question **? ?**, on a :

$$A_0 = I_0 + \mathrm{e} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} + \mathrm{e}$$

D'où $\boxed{A_0 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} + \mathrm{e}}$.

c. Par définition de A_n, on peut écrire que :

$$A_0 = \int_{\mathrm{e}^0}^{\mathrm{e}^{0+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'agit donc de l'aire du domaine sous la courbe Γ compris entre l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

3. Calculons la limite de I_n en $+\infty$, en écrivant :

$$I_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}} = \frac{n}{\mathrm{e}^n} + \frac{1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$$

Par croissance comparée $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$. On déduit donc, pour $X = n$ puis $X = n+1$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} = +\infty$$

D'où, par inverse :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}} = 0$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}} = 0$, on en déduit donc que, par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$$

Ainsi, d'après la question **? ?**, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} A_n = \mathrm{e}}$$

Fin du corrigé