∽ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud ∾ décembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$$

1. • Pour $z=5$, $z' = \frac{6}{3} = 2$; $\left|z'\right| = 2$;

   • Pour $z = 1+\mathrm{i}$, $z' = \frac{2+2\mathrm{i}-4}{1-\mathrm{i}-2} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} = \frac{(-2+2\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})} = \frac{2-2-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{1+1} = -2\mathrm{i}$. Donc $\left|z'\right| = 2$.

2. **a.** On a $|z-2| = \mathrm{A}M$ et $\left|\overline{z}-2\right| = \mathrm{A}N$.

   b. De $z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$, on déduit pour les modules que $|z'| = \left|\frac{2z-4}{\overline{z}-2}\right| = \frac{|2z-4|}{\left|\overline{z}-2\right|} = \frac{2|z-2|}{\left|\overline{z}-2\right|} = \frac{2\mathrm{A}M}{\mathrm{A}N}$.

   Or M et N sont les points d'affixes conjuguées et comme A appartient à l'axe des abscisses on a $\mathrm{A}M = \mathrm{A}N$.

   On a donc finalement $|z'| = 2$. Ce résultat montre que les points M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

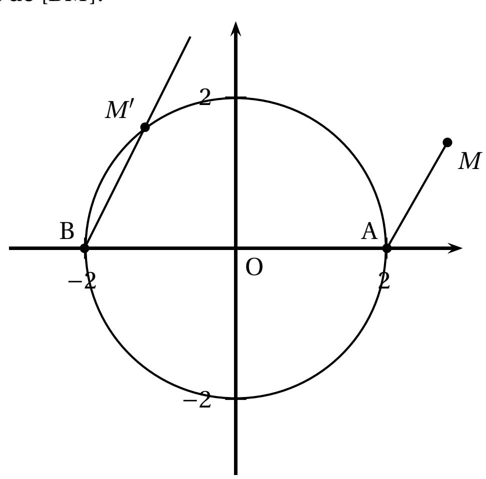
3. Si $z = x+\mathrm{i}y$, alors $z' = -2 \iff \frac{2z-4}{\overline{z}-2} = -2 \iff \frac{2x+2\mathrm{i}y-4}{x-\mathrm{i}-2} = -2 \iff 2x+2\mathrm{i}y-4 = -2(x-\mathrm{i}-2) \iff 4x-8=0 \iff x=2$. Comme $z \neq 2$, l'ensemble $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$ autrement dit la droite d'équation $x=3$ privée du point A.

4. $\frac{Z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\mathrm{B}M'}}} = \frac{z-2}{z'-(-2)} = \frac{z-2}{z'+2} = \frac{z-2}{\frac{2z-4}{\overline{z}-2}+2} =$
   $\frac{z-2}{\frac{2z-4+2(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2}} = \frac{(z-2)\left(\overline{z}-2\right)}{2z-4+2\overline{z}-4} = \frac{(z-2)\left(\overline{z}-\overline{2}\right)}{2(z+\overline{z})-8} = \frac{(z-2)\overline{(z-2)}}{2(z+\overline{z})-8}$.

   Si $z = x+\mathrm{i}y$, avec $z \neq 2$, alors $(z-2)\overline{(z-2)} = (x-2)^2+y^2 \in \mathbb{R}$ et $z+\overline{z} = 2x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $\frac{Z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\mathrm{B}M'}}} \in \mathbb{R}$.

   Géométriquement si ce que quotient est un réel c'est que les termes complexes ont le même argument, c'est-à-dire que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

5. Le point M' appartient au cercle de centre O de rayon et à la parallèle à (AM) contenant le point B. On peut construire pour la parallèle le symétrique de A autour du milieu de [BM].



EXERCICE 2 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

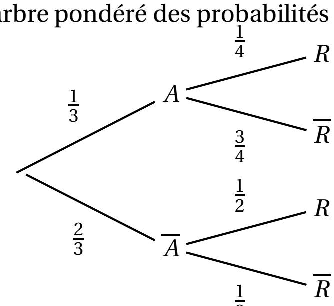
1. On a $a_n = 10^0 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$ (somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 10).
2. Les restes sont des naturels inférieurs à 2001 : il n'existe que 2 001 naturels différents inférieurs à 2 001, donc parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste. On a $a_n = 2001 q_n + r$ et $a_p = 2001 q_p + r$, d'où par différence :
   $a_n - a_p = 2001\left(q_n - q_p\right) + 0$. Le reste est nul ; $a_n - a_p$ est multiple de 2 001.
3. $a_m - a_k = \dfrac{10^m - 1}{9} - \dfrac{10^k - 1}{9} = \dfrac{10^m - 10^k}{9} = 10^k\left(\dfrac{10^{m-k} - 1}{9}\right) = 10^k \times a_{m-k}$.
4. $10 = 2 \times 5$; comme 2 et 5 ne divisent pas 2 001, 2 001 et 10 sont premiers entre eux. leur PGCD est égal à 1.
   On a vu que $a_m - a_k = 10^k \times a_{m-k}$.
   Donc si 2 001 divise $a_m - a_k$, il divise $10^k \times a_{m-k}$. Comme 2 001 est premier avec $10^k = (2 \times 5)^k$, il divise donc d'après Gauss, a_{m-k}
5. On a vu à la question 2 que parmi les 2 002 premiers termes de la suite (a_n) il en existe deux a_m et a_k qui ont même reste dans la division par 2 001 et leur différence est divisible par 2 001.
   Donc d'après la question précédente le terme a_{m-k} est divisible par 2 001.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

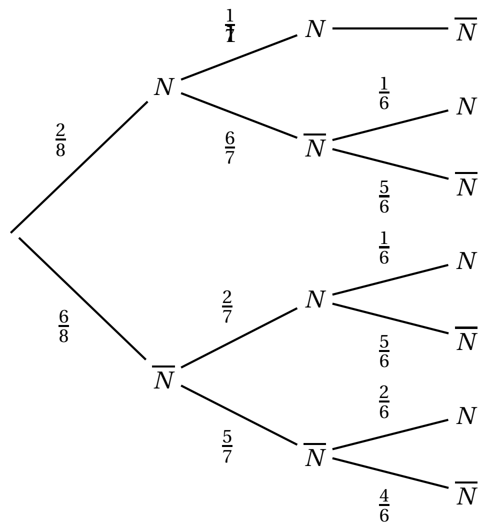
1. **a.** Il y a deux nombres multiple de 3 : 3 et 6.
   Si A est l'évènement : « on tire une boule dans l'urne A », on a
   $p(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Donc $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{2}{3}$.
   Pour tirer une boule noire, il faut tirer dans l'urne B, donc que l'évènement A ne soit pas réalisé.
   La probabilité de tirer une boule noire est donc $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

   b. Soit R l'évènement : « on tire une boule rouge ».
   On peut dresser un arbre pondéré des probabilités :



   • La probabilité de tirer une rouge est égale :
   $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{4}{12} = \dfrac{5}{12}$.

   c. Il faut trouver :
   $p_R\left(\overline{A}\right) = \dfrac{p\left(R \cap \overline{A}\right)}{p(R)} = \dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{3} \times \frac{12}{5} = \dfrac{4}{5}$.
2. **a.** On a donc 3 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.
   Soit N l'évènement : « la boule tirée est noire ».
   On peut construire un arbre pour les trois tirages successifs :



La probabilité de tirer une troisième boule noire est donc égale à la somme :
$\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{12+12+60}{8\times7\times6}=\frac{84}{8\times7\times6}=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$.

b. La probabilité de tirer une première boule noire est $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Les probabilités sont donc égales. La probabilité de tirer une noire en deuxième est aussi de $1/4$!

PROBLÈME **10 points**

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x)=\mathrm{e}^{x}(1-x)+1.}$$

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$g'(x)=\mathrm{e}^{x}(1-x)-\mathrm{e}^{x}=-x\mathrm{e}^{x}$ qui est du signe $-x$; donc
- Sur $]-\infty\,;\,0[$, $g'(x)>0$, donc g est croissante;
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x)<0$, donc g est décroissante.
- $g'(0)=0$; g a donc un maximum en 0 : $g(0)=1+1=2$.

2. l'intervalle $[1{,}27\,;\,1{,}28]$ est inclus dans $]0\,;\,+\infty[$, donc g est décroissante sur cet intervalle et
$g(1{,}27)\approx 0{,}039$ et $g(1{,}28)\approx -0{,}007$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires g étant continue sur l'intervalle s'annule une seule fois en $\alpha\in[1{,}27\,;\,1{,}28]$. Donc $g(\alpha)=0$.

3. On a $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{x}+1$.
On sair que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$.
Donc g est croissante de 1 à $g(0)=2$: g est donc positive sur $]-\infty\,;\,0[$. D'après la question précédente $g(x)>0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ et $g(x)<0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

B. Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+2$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interprter graphiquement ce résultat.

2. a. On a $f(x)=\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}+\frac{1}{x}}+1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}+1=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

b. Calculons $d(x) = f(x) - (x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} + 2 - (x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} - x = x\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} - 1\right] = \dfrac{x - x\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} d(x) = 0$, ce qui montre que la droite (d) dont une équation est $y = x+2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

c. On a vu que $d(x) = \dfrac{-x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Pour $x < 0$, le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc $d(x) > 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de son asymptote.

3. **a.** Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Le dénominateur est supérieur à 1, donc supérieur à 0 : le signe de $f'(x)$ est celui de g vu dans la partie A.

On a donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

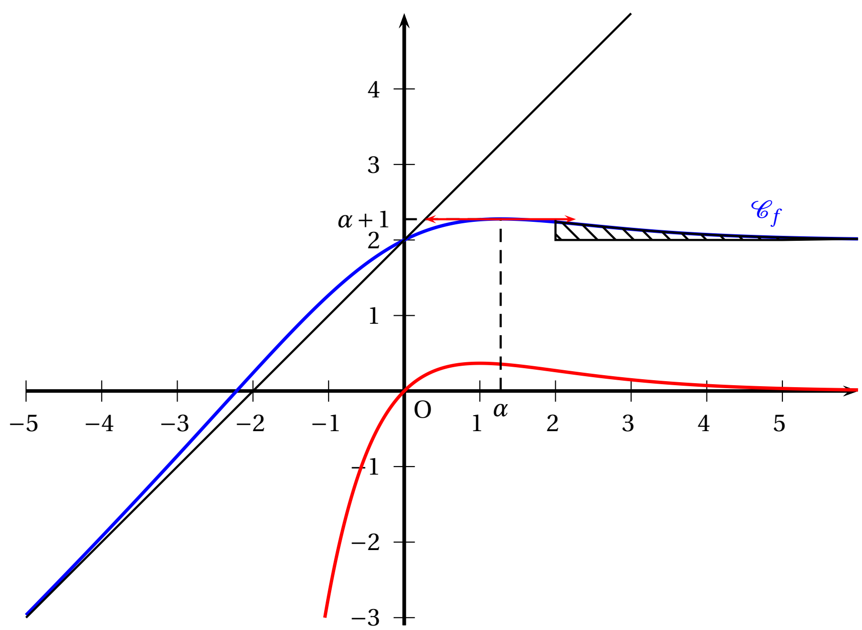
b. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha+1} + 2 = \dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1} + 2 = \alpha(\alpha-1)1 + \alpha - 1 + 2 = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$.

Conclusion : $f(\alpha) = p\alpha + q$, avec $p = 1$ et $q = 1$.

c. Des questions précédentes on déduit que f est croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ de moins l'infini à $\alpha+1$ et décroissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$ de $\alpha+1$ à 2.

4.



C. Encadrements d'aires

1. Voir plus haut.

2. On a $\mathrm{e}^x + 1 > \mathrm{e}^x \iff \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} > \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \iff \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} > \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$.

D'autre part $x \geqslant 2 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^2$

Or $\mathrm{e}^2 \approx 7,38$, donc $x \geqslant 2 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 7 \iff 8\mathrm{e}^x \geqslant 7 + 7\mathrm{e}^x \iff 8\mathrm{e}^x \geqslant 7(1+\mathrm{e}^x) \iff \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \geqslant \dfrac{7}{8\mathrm{e}^x} \iff \dfrac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$.

On a donc pour $x \geqslant 2$, $\dfrac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}+1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}$.

3. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où :
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer par parties :
$I_n = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_2^n - \displaystyle\int_2^n -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_2^n - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_2^n =$
$\left[-\mathrm{e}^{-x}(x+1)\right]_2^n = -(n+1)\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2}(2+1) = 3\mathrm{e}^{-2} - (n+1)\mathrm{e}^{-n}$.

4. On a $\mathscr{A}_n = \displaystyle\int_2^n \left[f(x)-2\right]\,\mathrm{d}x = \int_2^n \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x$.
En utilisant l'encadrement de la question 2, on a :
$\displaystyle\int_2^n \dfrac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A}_n \leqslant \int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ soit :
$\dfrac{7}{8}I_n \leqslant \mathscr{A}_n \leqslant I_n$

5. $I_n = 3\mathrm{e}^{-2} - (n+1)\mathrm{e}^{-n}$.
On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 3\mathrm{e}^{-2}$. On en déduit :
$\dfrac{21}{8}\mathrm{e}^{-2} \leqslant \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n \leqslant 3\mathrm{e}^{-2}$.