Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. • $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{D}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x-2 &= 0t \\ y-0 &= t \\ z-0 &= t \end{cases}$

$\iff M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{D}) \iff \begin{cases} x &= 2 \\ y &= t \\ z &= t \end{cases}.$

• $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\Delta) \iff$ il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{C}M} = t'\overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x-3 &= t' \\ y-2 &= -2t' \\ z-6 &= 2t' \end{cases}$

$\iff M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\Delta) \iff \begin{cases} x &= 3+t' \\ y &= 2-2t' \\ z &= 6+2t' \end{cases}.$

• (D) et (Δ) sont sécantes en un point s'il existe des réels t et t' tels que :

$\begin{cases} 2 &= 3+t' \\ t &= 2-2t' \\ t &= 6+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t' \\ t &= 2-t' \\ t &= 6+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t' \\ t &= 4 \\ t &= 6+2t' \end{cases}.$

Ce système admet une solution unique : $t = 4$ et $t' = -1$.

• (D) et (Δ) sont sécantes au point de coordonnées $(2\,;\,4\,;\,4)$.

2. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}6-0\\6-0\\-2-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$.

On sait que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est normal au plan (ABC). On a donc :

$M(x\,;\,y\,:\,z) \in (\mathrm{ABC}) \iff 6x+6y-3z+d = 0$.

Or $\mathrm{A} \in (\mathrm{ABC}) \iff 6\times 2+6\times 0-3\times 0+d = 0 \iff d = -12$.

Donc $M(x\,;\,y\,:\,z) \in (\mathrm{ABC}) \iff 6x+6y-3z-12 = 0 \iff 2x+2y-z-4 = 0$.

3. a. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ est normal au plan (ABC) ; il est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{w}$, donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{FH}} = k\overrightarrow{w}$.

b. H appartient à la droite définie par F et le vecteur directeur $\overrightarrow{w}$; ses coordonnées sont donc :

$\begin{cases} x &= 2+6t \\ t &= 4+6t \\ t &= 4-3t \end{cases}$

De plus le point H appartient au plan (ABC) ; ses coordonnées vérifient donc une équation de ce plan, soit :

$2(2+6t)+2(4+6t)-(4-3t)-4 = 0 \iff 12t+12t+3t+4+8-4 = 0 \iff$ $27t+4 = 0 \iff t = -\dfrac{4}{27}$. Les coordonnées de H sont donc :

$\begin{cases} x &= 2+6\times\left(-\dfrac{4}{27}\right) \\ t &= 4+6\times\left(-\dfrac{4}{27}\right) \\ t &= 4-3\times\left(-\dfrac{4}{27}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{10}{9} \\ t &= \frac{28}{9} \\ t &= \frac{40}{9} \end{cases}.$

c. La hauteur de ce tétraèdre étant [FH], le volume de ce tétraèdre est :

$V = \dfrac{1}{3}\times \mathrm{FH}\times \mathscr{A}(\mathrm{ABC})$.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{FH}}\left(-\frac{8}{9}\,;\,-\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\right)$, $\mathrm{FH}^2 = \dfrac{64+64+16}{81} = \dfrac{144}{81} = \left(\dfrac{12}{9}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$. Donc $\mathrm{FH} = \dfrac{4}{3}$.

D'autre part $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{1}{2} \times \left\|\overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{w}\right\| = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{36+36+9} =$
$\dfrac{1}{2} \times 9 = \dfrac{9}{2}$.
Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{9}{2} = 2$ (unités de volume).

Exercice 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

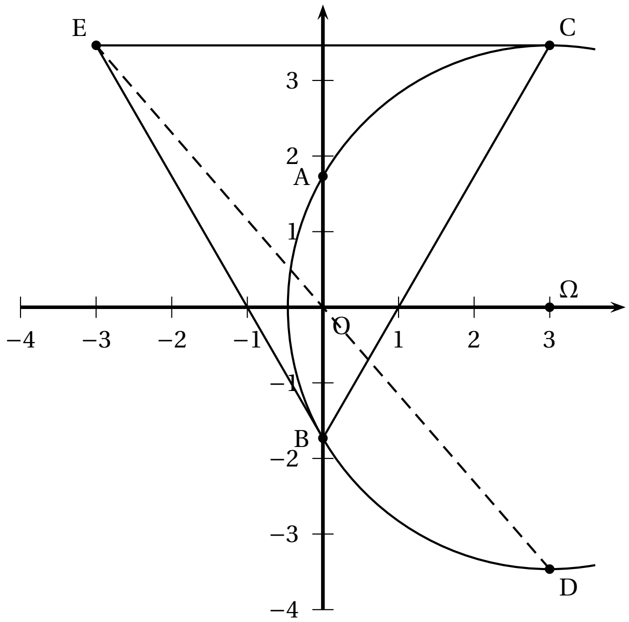
$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. • $P\left(\text{i}\sqrt{3}\right) = \left(\text{i}\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(\text{i}\sqrt{3}\right)^3 + 24\left(\text{i}\sqrt{3}\right)^2 - 18\left(\text{i}\sqrt{3}\right) + 63 =$
$9 + 18\sqrt{3}\text{i} - 72 - 18\sqrt{3}\text{i} + 63 = 0$, donc $\text{i}\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$;
• $P\left(-\text{i}\sqrt{3}\right) = \left(-\text{i}\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(-\text{i}\sqrt{3}\right)^3 + 24\left(-\text{i}\sqrt{3}\right)^2 - 18\left(-\text{i}\sqrt{3}\right) + 63 =$
$9 - 18\sqrt{3}\text{i} - 72 + 18\sqrt{3}\text{i} + 63 = 0$, donc $-\text{i}\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
• On a donc $P(z) = \left(z - \text{i}\sqrt{3}\right)\left(z + \text{i}\sqrt{3}\right)\left(az^2 + bz + c\right) = \left(z^2 + 3\right)\left(az^2 + bz + c\right) =$
$az^4 + bz^3 + cz^2 + 3az^2 + 3bz + 3c = az^4 + bz^3 + z^2(3a + c) + 3bz + 3c =$
$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$, d'où par identification :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -6 \\ 3a + c & = & 24 \\ 3c & = & 63 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -6 \\ 3 + c & = & 24 \\ c & = & 21 \end{array}\right.$$
Donc $P(z) = \left(z^2 + 3\right)\left(z^2 - 6z + 21\right)$.

2. On a $z^2 - 6z + 21 = (z-3)^2 - 9 + 21 = (z-3)^2 + 12 = (z-3)^2 - \left(2\text{i}\sqrt{3}\right)^2 =$
$\left(z - 3 + 2\text{i}\sqrt{3}\right)\left(z - 3 - 2\text{i}\sqrt{3}\right)$.
Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont donc :

$$\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad -\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad 3 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad 3 - 2\text{i}\sqrt{3}.$$

3. On reconnaît dans les affixes des points les solutions de l'équation $P(z) = 0$.



Considérons le point $\Omega(3\ ;\ 0)$. On a de façon évidente :

$\Omega C^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$; $\Omega D^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$; $\Omega A^2 = \Omega O^2 + \Omega A^2 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$ et $\Omega B^2 = 12$.

Les quatre points A, B, C et D sont équidistants de Ω qui est donc le centre du cercle de rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ qui les contient.

4. On a $z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$.

Alors $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \dfrac{3 + 2i\sqrt{3} - \left(-i\sqrt{3}\right)}{-3 + 2i\sqrt{3} - \left(-i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \dfrac{\left(3 + 3i\sqrt{3}\right)\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)}{\left(-3 + 3i\sqrt{3}\right)\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)} =$
$= \dfrac{-9 + 27 - 9i\sqrt{3} - 9i\sqrt{3}}{9 + 27} = \dfrac{18 - 18i\sqrt{3}}{36} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3} = e^{-\frac{\pi}{3}}$.

Il suit que le complexe $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ a pour module $\dfrac{BC}{BE} = 1 \Rightarrow BC = BE$.

De plus $\arg\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Conclusion : le triangle BEC est isocèle en B et son angle au sommet a pour mesure $\frac{\pi}{3}$; les autres angles on la même mesure et le triangle BEC est équilatéral.

EXERCICE 2 — 4 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 70n + 15 - 70n - 14 = 1$.

L'égalité $5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 1$ montre que les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. a. D'après la question 1. en prenant $n = 6$, les entiers $14 \times 6 + 3 = 87$ et $5 \times 6 + 1 = 31$ sont premiers entre eux.

On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} 87x + 31y & = & 2 \\ 87 \times 5 - 14 \times 31 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 87x + 31y & = & 2 \\ 87 \times 10 - 28 \times 31 & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow$
(par différence) $87(x - 10) + 31(y + 28) = 0 \iff 87(10 - x) = 31(y + 28) \quad (1)$.

Cette égalité montre, d'après le théorème de Gauss, que 87 étant premiers avec 31 et divisant 31(y + 28), divise $y + 28$: il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 28 = 87k$.

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$87(10 - x) = 31 \times 87k \iff 10 - x = 31k$.

Les couples solutions sont de la forme $(10 - 31k\ ;\ -28 + 87k)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : avec $k = 0$, on a bien $87 \times 10 + 31 \times (28) = 870 - 868 = 2$.

b. Fait à la question précédente.

c. M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient à la droite (D) d'équation $87x - 31y = 2$ si, et seulement si, le couple $(x\ ;\ -y)$ vérifie l'équation (E).

Les points de coordonnées entières positives sont les points de coordonnées $(10 - 31k\ ;\ -28 + 87k)$

l'abscisse est comprise entre 0 et 100, soit :

$0 \leqslant 10 - 31k \leqslant 100 \iff -100 \leqslant 31k - 10 \leqslant 0 \iff -90 \leqslant 31k \leqslant 10 \iff -\dfrac{90}{31} \leqslant k \leqslant \dfrac{10}{31}$. D'où $x = 0$, -1 ou -2.

Les points sont donc les points de coordonnées (10 ; 28), (41 ; 115) et (72 ; 202).

PROBLÈME — 12 points

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2},$$

Partie A

1.

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1.$$

a. Sur $]0\,;\,+\infty[$, g est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x}$.

Or $(x-1)\left(3x^2+3x+2\right) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$. Donc

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}.$$

b. Pour tout $x > 0$, $3x^2+3x+2 \geqslant 2 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$:

- $x < 1$, donc $g'(x) < 0$; la fonction g est décroissante sur $]0\,;\,1[$;
- $x = 1$, $g'(1) = 0$; $g(1) = -1$.
- $x > 1$, donc $g'(x) > 0$; la fonction g est croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

2. a. • Limite en 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^2+1+\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = +\infty$ par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

• Limite en $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1-2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$ vu à la question 1. b.

Donc sur $]0\,;\,1[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $]0\,;\,1[$;

sur $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

$f(1) = 2$ est le minimum de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. a. $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 1 > 0$ donc h est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$; la fonction étant continue sur $]0\,;\,+\infty[$ elle s'annule en un point unique α.

La calculatrice donne $h(0,4) \approx -0,51$ et $h(0,7) \approx 0,34$.

Le même raisonnement montre que $0,4 < \alpha < 0,7$.

b. $h(\alpha) = 0 \iff \alpha + \ln\alpha = 0 \iff \ln\alpha = -\alpha \iff \alpha = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

2. a. Soit d la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.

Ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$.

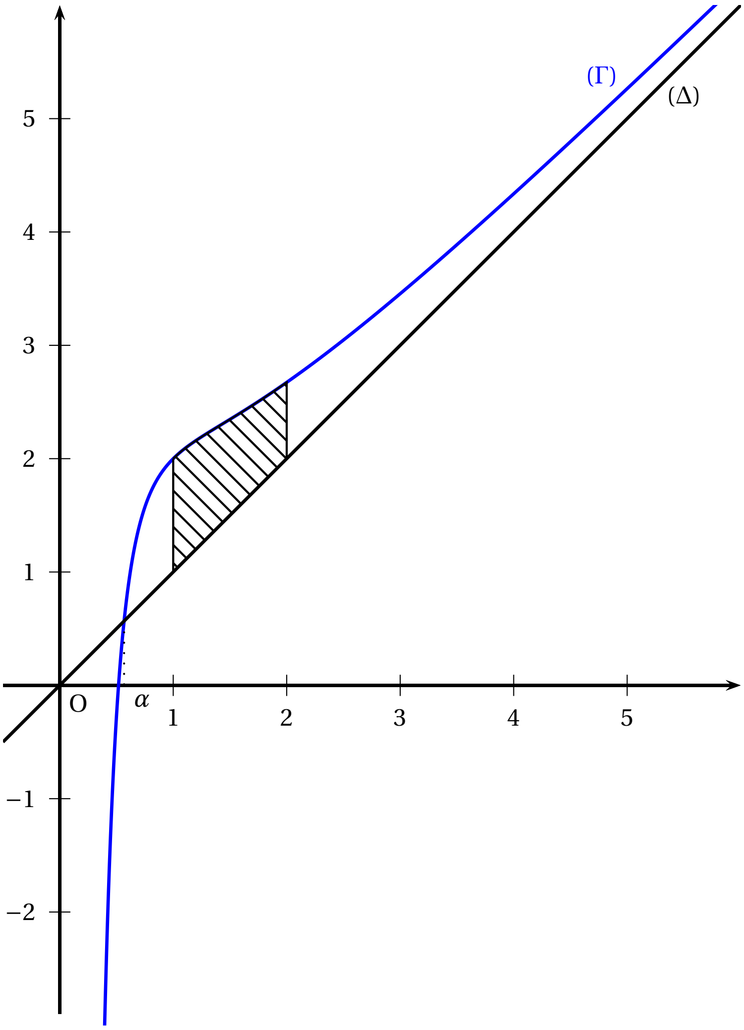
b. On a $f(x) = x + \dfrac{x+\ln x}{x^2} \iff f(x) - x = \dfrac{x+\ln x}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0$, le signe de cette différence est celui de la fonction h.

Donc sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(x) - x < 0$: la courbe (Γ) est sous la droite (Δ).

Sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) - x > 0$: la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ).

3.



4. **a.** On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t^2$, d'où : $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$: toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur l'intervalle $[1\,;2]$; on peut donc intégrer par parties :
$\mathrm{I} = \left[-\dfrac{\ln(t)}{t}\right]_1^2 + \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{\ln(t)}{t} - \dfrac{1}{t}\right]_1^2 = -\dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(1)}{1} + \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln(2)}{2} = \dfrac{1-\ln 2}{2} \approx 0,153.$

b. Sur l'intervalle $[1\,;2]$, la fonction f est positive et on a vu que sur cet intervalle la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ), donc l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ), la droite (Δ) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est en unité d'aire égale à l'intégrale :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 \left[f(x) - x\right]\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2}\right]\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^2 + \mathrm{I} = \ln 2 + \dfrac{1-\ln 2}{2} = \dfrac{1+\ln 2}{2}$ u. a.
Comme l'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4\text{cm}^2$, l'aire est donc égale à :
$\mathscr{A} = 4 \times \dfrac{1+\ln 2}{2} = 2(1+\ln 2) \approx 3,386$ soit au centième près 3,39 cm^2.

Partie C

1. **a.** On a pour tout réel x, $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$, donc φ est décroissante en particulier sur I.
$0,4 \leqslant x \leqslant 0,7 \Rightarrow \varphi(0,7) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(0,4)$ soit $0,496 < \varphi(x) < 0,671$, donc $\varphi(x) \in I$

b. On a vu que $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, donc en reprenant les encadrements précédents :

$0,4 \leqslant x \leqslant 0,7 \Rightarrow 0,496 < \varphi(x) < 0,671 \Rightarrow -0,671 < -\varphi(x) < -0,496 \Rightarrow |\varphi'(x)| < 0,7$.

c. On a vu dans la partie B que $\mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ, avec $x \in I$ et $\alpha \in I$,

$\left|\varphi(x) - \varphi(\alpha) \leqslant 0,7|x-\alpha|\right| \iff \left|\varphi(x) - \alpha \leqslant 0,7|x-\alpha|\right|$.

2. a. On a vu que pour $x \in I$, $\varphi(x) \in I$: tous les termes de la suite appartiennent donc à I, le premier terme appartenant lui aussi à I.

L'inégalité des accroissement finis précédente s'écrit donc :

$\left|\varphi\left(u_n\right) - \alpha\right| \leqslant 0,7|u_n - \alpha|$ soit

$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,7|u_n - \alpha|$.

- *Initialisation*

De $0,4 < \alpha 0,7$, on déduit que $|u_0 - \alpha| = |0,4 - \alpha| < 0,3$, donc on a bien $|u_0 - \alpha| < 0,3 \times 0,4^0$.

- *Hérédité*

Supposons qu'il existe un naturel p tel que :

$\left|u_p - \alpha\right| \leqslant 0,3 \times (0,7)^p$.

Or d'après le résultat précédent :

$\left|u_{p+1} - \alpha\right| \leqslant 0,7|u_p - \alpha| = 0,7 \times 0,3 \times (0,7)^p$ ou

$\left|u_{p+1} - \alpha\right| \leqslant 0,3 \times 0,7^{p+1}$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,3 \times (0,7)^n.$$

b. Comme $-1 < 0,7 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, ce qui signifie que la suite u a pour limite α.

3. On a $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ lorsque $0,3 \times (0,7)^n < 10^{-3}$ ou $0,7^n < \dfrac{10^{-3}}{0,3}$ d'où par croissance du logarithme népérien :

$n \ln 0,7 < \ln\left(\dfrac{10^{-3}}{0,3}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{0,3}\right)}{\ln 0,7}$ (car $\ln 0,7 < 0$).

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{0,3}\right)}{\ln 0,7} \approx 15,99$. Il faut donc prendre au moins $p = 16$.