∽ Corrigé du baccalauréat ES Liban mai 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats
Partie A

1. L'ordonnée à l'origine est égale à -2 et le coefficient directeur à 2 : une équation de T est donc $y = 2(x-1)$.
2. Il y deux tangentes horizontales en 3 et 5 qui correspondent à deux annulations du nombre dérivé : donc deux solutions.
3. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
   On sait que $f(x) < 2x - 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2 = -\infty$.
4. La fonction $\ln f$ est définie quand $f(x) > 0$, soit quand $x > 1$. Réponse $]1 ; 6]$.
5. On a $\ln f(x) = 0 \iff f(x) = 1$: cette équation a deux solutions.

Partie B

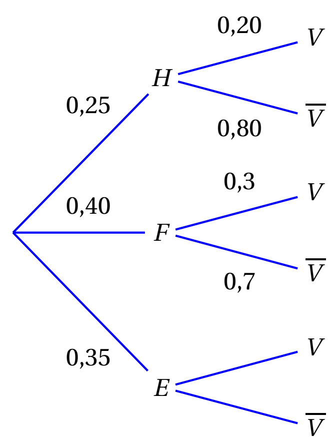
6. La fonction exponentielle est croissante, donc g est croissante quand f l'est aussi soit sur $]-\infty ; 3]$.
7. On a $g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$, donc $g'(1) = f'(1)\mathrm{e}^{f(1)} = 2 \times \mathrm{e}^0 = 2$.
8. Une fonction exponentielle a des valeurs supérieures à zéro : la fonction g ne s'annule pas.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

1.



2. **a.** $H \cap V$ désigne l'évènement : « la personne interrogée est un homme ayant déjà vu le film ».
   b. $p_H(V) = 0,2$. Il en résulte que :
   $p(H \cap V) = p(H) \times p_H(V) = 0,25 \times 0,2 = 0,05$.
3. La probabilité que l'évènement V soit réalisé est égale à $0,345$.
   a. $p\left(\overline{V}\right) = 1 - p(V) = 1 - 0,345 = 0,655$.

b. D'après la loi des probabilités totales :
$p(V) = p(H \cap V) + p(F \cap V) + p(E \cap V)$.
Or $p(F \cap V) = p(F) \times p_F(V) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.
Donc $p(V) = p(H \cap V) + p(F \cap V) + p(E \cap V) \iff$
$p(E \cap V) = p(V) - p(H \cap V) - p(F \cap V) = 0,345 - 0,05 - 0,12 = 0,175$.
Or $p_E(V) = \dfrac{E \cap V)}{p(E)} = \dfrac{0,175}{0,35} = 0,5$.

4. La variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant déjà vu le film avant cette projection suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,435$.
La probabilité qu'aune des quatre personnes n'ait vu le film est égale à $(1 - 0,435)^4$, donc la probabilité demandée est égale à :
$1 - (1 - 0,435)^4 = 1 - 0,655^4 \approx 0,8159 \approx 0,816$ au millième près.

Partie B

1. $q = 1 - (0,55 + 1 + 0,15 + 0,15 + 0,05 + 0,05) = 1 - 0,95 = 0,05$.
2. On a $E = 1 \times 0,55 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,15 + 4 \times 0,05 + 5 \times 0,05 + 6 \times 0,05 =$
$0,55 + 0,3 + 0,45 + 0,2 + 0,25 + 0,3 = 1,95$ soit environ 2.
Cela signifie qu'en moyenne un spectateur sortant de la salle a vu deux fois le film.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Question préliminaire :
Il y a 11 arêtes, donc 11 questionnaires.

Partie A :

1. En respectant l'ordre alphabétique on a :
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Il n'y a pas d'arête entre E et F : le graphe n'est pas complet.
3. **a.** Le graphe est connexe et seuls B et C ont des degrés impairs (5 et 3 respectivement) : il existe donc une chaîne eulérienne. On peut parcourir le jardin et répondre à tous les questionnaires en partant de n'importe quel sommet.
b. C est l'un des sommets d'ordre impair, donc la visite se terminera par l'autre sommet de degré impair soit B.

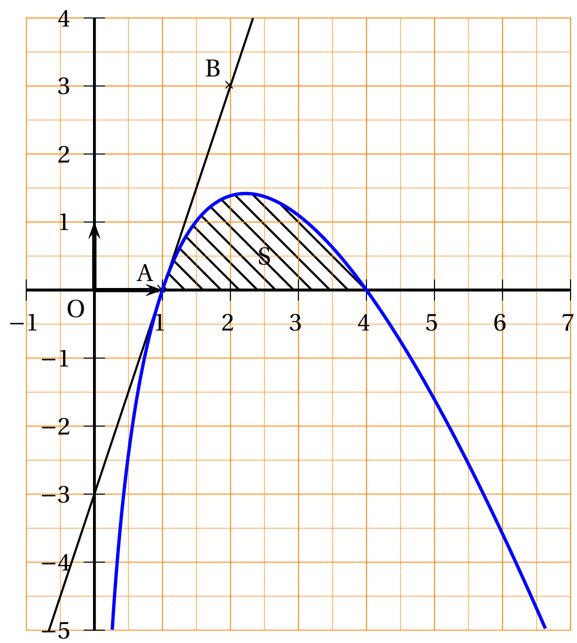
Partie B :

1. Soit γ le nombre chromatique de ce graphe ; le plus haut degré est égal à 5, donc $\gamma \leqslant 6$; de plus le sous-graphe {A ; B ; C ;D} est complet, donc $\gamma \geqslant 4$.
Conclusion : $4 \leqslant \gamma \leqslant 6$.

2. En rangeant les sommets par degrés décroissants on peut donner :
la couleur rouge à B ;
la couleur bleue à A et E ;
la couleur jaune à D et F ;
la couleur verte à C.
On peut donc faire un coloriage à 4 couleurs : on a donc $\gamma = 4$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



Partie A

Pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln x$ où a et b sont deux réels.

1. Pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = a\ln x + (ax+b)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{ax\ln x + ax + b}{x}$.
2. On lit $f(4) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3$.
3. D'après les deux résultats précédents :
$$\left\{\begin{array}{lcl} f(4) & = & 0\\ f'(1) & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} (4a+b)\ln 4 & = & 0\\ \dfrac{a\ln 1 + b}{1} & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4a+b & = & 0\\ a+b & = & 3\end{array}\right. \iff$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3a & = & -3\\ a+b & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -1\\ b & = & 4\end{array}\right.$$ Donc $f(x) = (4-x)\ln x$.

Partie B

1. La fonction F est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et :
$F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2x\ln x + x^2\times\frac{1}{x} - x - 8\ln x - 8x\times\frac{1}{x} + 8\right) =$

$-\dfrac{1}{2}(2x\ln x + x - x - 8\ln x - 8 + 8) = -\dfrac{1}{2}(2x\ln x - 8\ln x) = -x\ln x + 4\ln x = (4-x)\ln x = f(x)$.
Conclusion F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1) =$
$\left(-\dfrac{1}{2}\left(4^2\ln 4 - \dfrac{4^2}{2} - 8\times 4\ln 4 + 8\times 4\right)\right) - \left(-\dfrac{1}{2}\left(1^2\ln 1 - \dfrac{1^2}{2} - 8\ln 1 + 8\right)\right) =$
$-\dfrac{1}{2}(16\ln 4 - 8 - 32\ln 4 + 32) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2} + 8\right) = 8\ln 4 - 12 + \dfrac{15}{4} = 8\ln 4 - \dfrac{33}{4} = 16\ln 2 - \dfrac{33}{4}$.

3. La fonction f est positive sur l'intervalle $[1~;~4]$, donc I est la mesure en unités d'aire de la surface S; on a donc $\mathrm{I} = 16\ln 2 - \dfrac{33}{4} \approx 2,84$ soit environ 2,8 u.a (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure).

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. De 1986 à 1987 le pourcentage d'évolution du nombre de ménages équipés d'un ordinateur a été de $\dfrac{235-160}{60}\times 100 = 46,875$ soit environ 47 %.
2. Augmenter de 46,875 % c'est multiplier par $1,46875$ chaque année, donc en 10 ans par $1,46875^{10}$; le nombre de ménages aurait été à ce rythme en 1996 : $160\times 1,46875^{10} \approx 7474,8$ soit environ 7 475 milliers de ménages.
3. **a.** Voir à la fin.
   b. Voir l'annexe.
   c. La calculatrice donne comme équation $z = 0,39x + 5,08$.
   d. On a donc $z = \ln y = 0,39x + 5,08$, on déduit que $y = \mathrm{e}^{0,39x+5,08} = \mathrm{e}^{0,39x}\times \mathrm{e}^{5,08}$.
   Comme $\mathrm{e}^{5,08} \approx 160,7$ soit 161 à 1 près, on a donc $y \approx 161\mathrm{e}^{0,39x}$. 2000 correspond à $x = 14$, d'où $y \approx 161\mathrm{e}^{0,39\times 14} \approx 37851$ milliers de foyers équipés.

Partie B

1. 2002 correspond à $n = 2$, d'où $f(2) = \dfrac{20}{1+2000\mathrm{e}^{-0,44\times 2}} = \dfrac{20}{1+2000\mathrm{e}^{-0,88}} \approx 0,02408$ millions de ménages soit 24 080 foyers.
   2003 correspond à $n = 3$, d'où $f(3) = \dfrac{20}{1+2000\mathrm{e}^{-0,44\times 3}} = \dfrac{20}{1+2000\mathrm{e}^{-0,132}} \approx 0,037364$ millions de ménages soit 37 364 foyers.
2. f est de la forme $\dfrac{20}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + 2000\mathrm{e}^{-0,44x}$.
   Sa dérivée est donc $f'(x) = -\dfrac{20u'(x)}{(u(x))^2}$.
   Or $u'(x) = -0,44\times 2000\mathrm{e}^{-0,44x} = -880\mathrm{e}^{-0,44x}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-0,44x} > 0$ quel que soit le réel x, $u'(x) < 0$ et par conséquent $f'(x) > 0$: la fonction f est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.
   a. Il faut résoudre l'équation : $f(x) = 18$ soit $\dfrac{20}{1+2000\mathrm{e}^{-0,44x}}$ d'où

$18\left(1+=202\,000\text{e}^{-0,44x}\right)=20$, puis $18+18\times 2\,000\text{e}^{-0,44x}=20$ et $36\,000\text{e}^{-0,44x}=2$ et enfin $\text{e}^{-0,44x}=\dfrac{2}{36\,000}=\dfrac{1}{18\,000}$; en prenant le logarithme népérien : $-0,44x=-\ln 18000$ d'où $x=\dfrac{\ln 18\,000}{0,44}\approx 22,3$

Il faut donc attendre la 23e année soit 2003.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^{-0,44x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=20$.

Ceci signifie qu'à terme le nombre de foyers équipés va plafonner à 20 millions.

ANNEXE 1 à RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1
Commun à tous les candidats

Partie A

Questions	
1. L'équation réduite de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 est	☐ $y = x - 1$
	☐ $y = x - 2$
	■ $y = 2(x - 1)$
2. L'équation $f'(x) = 0$ admet	☐ 1 solution
	■ 2 solutions
	☐ 0 solution
3. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est	■ $-\infty$
	☐ -5
	☐ 6
4. La fonction $\ln f$ est définie sur	☐ $[-\infty ; 6]$
	☐ $]0 ; 6]$
	■ $]1 ; 6]$
5. La fonction $\ln f$ s'annule exactement	☐ 1 fois
	■ 2 fois
	☐ 0 fois

Partie B

Dans cette partie du QCM, on appelle g la fonction définie sur $]-\infty ; 6]$ par son expression $g(x) = \exp[f(x)]$.

Questions	
6. La fonction g est strictement croissante sur	■ $]-\infty ; 3]$
	☐ $]1 ; 6]$
	☐ $]-\infty ; 6]$
7. $g'(1)$ est égal à	■ 2
	☐ 0
	☐ 2e
8. La fonction g s'annule exactement	☐ 1 fois
	☐ 2 fois
	■ 0 fois

ANNEXE 2 à RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4
Commun à tous les candidats

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de ménages $z_i = \ln y_i$	5,08	5,46	5,84	6,23	6,63	7,06	7,48	7,86	8,26	8,59	8,90