Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Liban juin 2017

Exercice 1 3 points

1. **Réponse c.**

   Soit μ la valeur moyenne de g sur $[1 ; \text{e}]$, on a :
   $\mu = \dfrac{1}{\text{e}-1}\displaystyle\int_1^{\text{e}} \dfrac{2}{x}\,\text{d}x = \dfrac{2}{\text{e}-1}\displaystyle\int_1^{\text{e}} \dfrac{1}{x}\,\text{d}x = \dfrac{2}{\text{e}-1}\left[\ln x\right]_1^{\text{e}} = \dfrac{2}{\text{e}-1}(\ln \text{e} - \ln 1) = \dfrac{2}{\text{e}-1}$.

2. **Réponse d.**

   D'après le graphique, on lit que l'espérance $\mu = 1$.
   On sait par ailleurs que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ donc par lecture graphique, on en déduit que :
   $\begin{cases} 1 - 2\sigma & = 0,6 \\ 1 + 2\sigma & = 1,4 \end{cases}$ qui donnent toutes les deux $2\sigma = 0,4$, soit $\sigma = 0,2$.

3. **Réponse a.**

   Pour une proportion théorique $p = 0,15$ et une taille n de l'échantillon de 50, on a :
   $n = 50 \geqslant 30$, $np = 50 \times 0,15 = 7,5 \geqslant 5$, $n(1-p) = 50 \times 0,85 = 42,5$.
   Les conditions de validité de calcul de l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont remplies et on a :

   $$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   La borne inférieure :
   $p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,15 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{50}} \approx 0,051$ par défaut.
   La borne supérieure :
   $p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,15 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{50}} \approx 0,249$ par excès.
   Ainsi, l'intervalle de fluctuation cherché est $I = [0,051\ ;\ 0,249]$.

Exercice 2 **6 points**

Partie A

1. La réduction des GES de 8 % correspond à un cœfficient multiplicateur de $1 - \dfrac{8}{100} = 0,92$.
   Il vient donc que si la France a respecté ses engagements, alors la quantité de GES émise en 2012 doit être inférieure à :

   $$559 \times 0,92 = 514,28$$

   Or, en 2011 (donc avant la date buttoir) la quantité de GES était déjà inférieure à 514,2 mégatonnes.

   En 2011, la France respectait déjà cet engagement.

2. Soit Q la quantité émise en 2010. On sait que la quantité atteinte de 486 mégatonnes en 2011 représentait déjà une baisse de 5,6 % par rapport à 2010. Soit :

$$Q \times \left(1 - \frac{5,6}{100}\right) = 486$$

D'où $Q = \dfrac{486}{0,944} \approx 514,8$ mégatonnes.

La quantité émise de GES en équivalent CO_2 en 2010 était d'environ 514,8 mégatonnes.

Partie B

1. u_0 est la quantité émise en 2005, soit $u_0 = 41$.
   u_1 est la quantité émise en 2006 qui représente une réduction de 2 % par rapport à 2005 à laquelle on doit rajouter les 200 tonnes (soit 0,2 millier de tonnes) dues à l'implantation des nouvelles entreprises : :
   $u_1 = 41 \times \left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 0,2 = 40,38$ milliers de tonnes.
2. Lors de l'année u_{n+1} la quantité émise représente 98 % de la quantité émise l'année n, soit $0,98u_n$.
   On rajoute à cette quantité celle émise par les nouvelles entreprises, d'où :

$$\text{Pour tout } n,\ u_{n+1} = 0,98u_n + 0,2$$

3. **a.** Pour tout n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0,98u_n + 0,2 - 10 \\ &= 0,98u_n - 9,8 \\ &= 0,98\left(u_n - \frac{9,8}{0,98}\right) \\ &= 0,98(u_n - 10) \\ &= 0,98v_n \end{aligned}$$

   Par définition, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 = 31$.

   b. Puisque (v_n) est une suite géométrique, on a :
   Pour tout n, $v_n = v_0q^n = 31 \times 0,98^n$.

   c. En remplaçant v_n par son expression dans la relation précédente, on obtient :
   Pour tout n, $u_n - 10 = 31 \times 0,98^n$, soit $u_n = 31 \times 0,98^n + 10$.
4. **a.** $0 < 0,98 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,98^n = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

   b. Au bout d'un certain nombre d'années, la quantité de GES en équivalent CO_2 émise chaque année sera de 10 milliers de tonnes.
5. **a.**

```
Variables
  U est du type nombre
  n est du type nombre entier
Début Algorithme
  U prend la valeur 41
  n prend la valeur 0
  Tant que U > 20,5 faire
    Début Tant que
    U prend la valeur 0,98 × U + 0,2 ou bien 31 × 0,98^n + 10
    n prend la valeur n + 1
    Fin Tant que
  Afficher n
Fin Algorithme
```

b. Le résultat affiché permet de dire que la zone industrielle émettra moins de 20,5 milliers de tonnes au bout de 54 ans, soit en 2059.

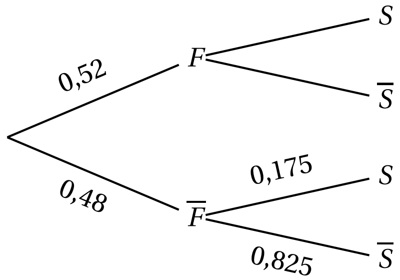
Exercice 3 **5 points**

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L.

Partie A

1. 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience, donc $p(S) = 0,18$.
Parmi les hommes demandeurs d'emploi, 17,5 % sont sans expérience, donc $p_{\overline{F}}(S) = 0,175$.

2.



3. $p\left(\overline{F} \cap S\right) = p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(S) = 0,48 \times 0,175 = 0,084$.
La probabilité qu'un demandeur d'emploi choisi au hasard soit une femme et sans expérience est de 0,084. (8,4 % des demandeurs d'emploi sont des femmes sans expérience).

4. On cherche $p_S\left(\overline{F}\right) = \dfrac{p\left(\overline{F} \cap S\right)}{p(S)} = \dfrac{0,084}{0,18} = \dfrac{7}{15} \approx 0,467$.

Sachant que le demandeur d'emploi est sans expérience, la probabilité que ce soit un homme est d'environ 0,467.

5. On cherche $p_F(S) = \dfrac{p(F \cap S)}{p(F)}$. Il faut déterminer $p(F \cap S)$, pour cela on sait que F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers composé par les demandeurs d'emploi, par conséquent :
$p(S) = p(S \cap F) + p\left(S \cap \overline{F}\right)$ soit $0,18 = p(S \cap F) + 0,084$. Par conséquent :

$$p(S \cap F) = 0,18 - 0,084 = 0,096$$

On en déduit $p_F(S) = \dfrac{p(F \cap S)}{p(F)} = \dfrac{0,096}{0,52} \approx 0,185$.

Sachant que le demandeur d'emploi est une femme, la probabilité qu'elle soit sans expérience est d'environ $0,185$.

Partie B

On choisi au hasard une fiche d'un demandeur d'emploi, c'est celle d'une personne sans expérience ou non. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli donc le succès est « le demandeur d'emploi est sans expérience » de probabilité $p = 0,18$.

On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 5 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,18$.

Soit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès dans ce schéma, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\ ;\ 0,18)$.

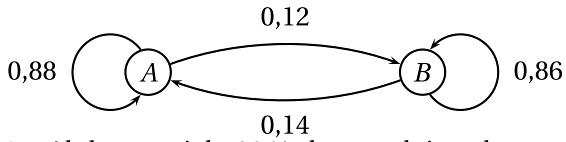
On cherche $p5X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} 0,18^0 \times (1 - 0,18)^{5-0} = 1 - 0,82^5 \approx 0,629$.

La probabilité que parmi les 5 fiches tirées, au moins une soit celle d'un demandeur d'emploi sans expérience est de 0,418.

Exercice 3 Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

1.



2. On sait qu'en 2015, Alpha possède 30 % du marché et donc que Bravo possède 70 % du marché, d'où :

$$a_0 = 0,3 \qquad\qquad b_0 = 0,7$$

3. En 2018, on a $n = 3$, on recherche donc P_3 qui est donné par $P_3 = P_0 \times M^3$.

À la calculatrice, $P_3 = \begin{pmatrix}0,442 & 0,558\end{pmatrix}$ où les valeurs sont arrondies à 10^{-3}.

En 2018, la part de marché pour l'opérateur Alpha sera d'environ 44,2 % selon ce modèle.

4. **a.** L'état stable vérifie la relation $P = P \times M$, soit :

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,88 & 0,12\\0,14 & 0,86\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,88x + 0,14y & 0,12x + 0,86y\end{pmatrix}$$

Si deux matrices sont égales alors leurs cœfficients sont égaux deux à deux, d'où :

$$\begin{cases} 0,88x+0,14y &= x\\ 0,12x+0,86y &= y\end{cases} \iff \begin{cases} -0,12x+0,14y &= 0\\ 0,12x-0,14y &= 0\end{cases}$$

Ces deux équations sont les mêmes, on n'en garde qu'une : $0,12x-0,14y=0$ mais par ailleurs l'état stable est un état probabiliste donc $x+y=1$, d'où le nouveau système :

$$\begin{cases} 0,12x-0,14y &= 0\\ x+y &= 1\end{cases}$$

b. $\begin{cases} 0,12x-0,14y &= 0\\ x+y &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} y &= 1-x\\ 0,12x-0,14(1-x) &= 0\end{cases} \iff$

$\begin{cases} y &= 1-x\\ 0,12x-0,14+0,14x &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{0,14}{0,26}=\dfrac{7}{13}\\ y &= 1-\dfrac{7}{13}=\dfrac{6}{13}\end{cases}$ L'état stable est donc $P=\begin{pmatrix}\dfrac{7}{13} & \dfrac{6}{13}\end{pmatrix}$.

c. Au bout d'un grand nombre d'années, la répartition du marché entre les deux opérateurs sera de :

53,8 % pour Alpha et 46,2 % pour Bravo

Partie B

1.

C	A	B	D	E	F	H	I	G
0	25(C)	30(C)	20(C)	∞	∞	∞	∞	∞
	25(C)	30(C)	20(C)	40(D)	∞	∞	35(D)	∞
	25(C)	30(A)		40(D)	∞	35(A)	35(D)	∞
		30(A-C)		40(D)	∞	35(A)	35(D)	∞
				40(D)	45(H)	35(A)	35(D)	55(H)
				40(D)	45(H)		35(D)	55(H)
				40(D)	45(H)			55(H)
					45(H)			50(F)
								50(F)

Le trajet le moins cher à déployer entre C et G est C – A – H – F – G.

2. Il coûtera 50 000€.

Exercice 4 6 points

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur [0 ; 10] et pour tout $x \in [0\,;\,10]$, on a :

$f'(x)=-\dfrac{(0,5+100\mathrm{e}^{-x})'}{(0,5+100\mathrm{e}^{-x})^2}=-\dfrac{-100\mathrm{e}^{-100x}}{(0,5+100\mathrm{e}^{-x})^2}=\dfrac{100\mathrm{e}^{-x}}{(0,5+100\mathrm{e}^{-x})^2}$.

2. a. Pour tout $x \in [0\,;\,10]$,

$$100\mathrm{e}^{-x}-0,5 \iff \geqslant 0$$

$$\mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{0,5}{100}$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $[0~;~10]$

$$\begin{aligned}-x &\geqslant \ln 0,005\\ x &\leqslant -\ln 0,005\end{aligned}$$

b. Pour tout $x \in [0~;~10]$, $\dfrac{100\text{e}^{-x}}{(0,5+100\text{e}^{-x})^3} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $100\text{e}^{-x} - 0,5$.

D'après le 2) a. on sait que $f''(x) \geqslant 0$ équivalent à $x \leqslant -\ln 0,005$, donc :

x	0		$-\ln 0.005$		10
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

3. D'après la question 2), on sait que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $-\ln 0,005$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I d'abscisse $-\ln 0,005$.

4. On a vu que : $f''(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant -\ln 0,005$ soit $f''(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant -\ln 0,005$

Or, la fonction f est concave si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$.

On en déduit que f est concave sur $[-\ln 0,005~;~10]$.

Partie B

1. a. $f(10) = \dfrac{1}{0,5+100\text{e}^{-10}} \approx 1,98$.

b. $x = 10$ représente 250 années en plus par rapport à 1900, donc d'après la question 1), on en déduit que la température ce sera élevée de 1,98 °C en 2150 selon ce modèle. L'accord de Paris sera donc respecté.

2. a. On a vu que l'abscisse du point d'inflexion est $-\ln 0,005$. Or, ici pour ce modèle l'unité vaut 25 ans donc, le point d'inflexion de la courbe de température aura pour abscisse $-\ln 0,005 \times 25 \approx -132,47$.

L'année correspondant à l'abscisse du point d'inflexion est à l'unité près 2032.

b. Calculons $f(-\ln 0,005)$:

$f(-\ln 0,005) = \dfrac{1}{0,5+100\text{e}^{\ln 0,005}} = \dfrac{1}{0,5+100\times 0,005} = 1$.

L'élévation en température depuis 1900 s'élèvera de 1°C en 2032 au point d'inflexion.

3. a. En 2033, la température terrestre continuera d'augmenter car au vu du graphique la fonction est croissante sur $[0~;~10]$.

On peut aussi utiliser le fait que pour tout $x \in [0~;~10]$,

$f'(x) = \dfrac{100\text{e}^{-x}}{(0,5+100\text{e}^{-x})^2} > 0$ comme rapport de deux expressions strictement positives.

b. En 2033, la vitesse du réchauffement climatique commencera à diminuer car la fonction f est concave sur $[-\ln 0,005~;~10]$.

4. Il faut résoudre l'équation $f(x) = 1,5$

$$\begin{aligned}
f(x) = 1,5 &\iff \frac{1}{0,5+100\mathrm{e}^{-x}} = \frac{3}{2}\\
&\iff \frac{1}{2}+100\mathrm{e}^{-x} = \frac{2}{3}\\
&\iff 100\mathrm{e}^{-x} = \frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\\
&\iff \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{600}\\
&\iff -x = \ln\frac{1}{600}\\
&\iff -x = -\ln 600\\
&\iff x = \ln 600
\end{aligned}$$

L'année où ce seuil sera atteint selon ce modèle est $1900+25\times\ln 600 \approx 2060$.