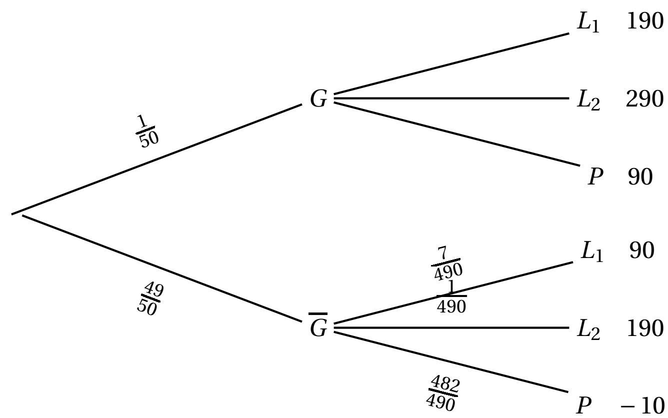
∽ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ∾ juin 2001

Exercice 1 **4 points**

1. a.



b. On a $p\left(\overline{G}\right) = 1 - p(G) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50} = 0,98$.

Puis $p_{\overline{G}}(P) = 1 - p(L_1) - p(L_2) = 1 - \frac{1}{70} - \frac{1}{490} = \frac{490-7-1}{490} = \frac{482}{490} = \frac{241}{245}$

c. Voir l'arbre

2. a. Il faut trouver $p_G(L_1)$.

On sait que $p(X = 190) = \dfrac{1}{250}$; or on peut gagner 190 euros, soit en gagnant 100 euros au grattage puis 100 euros au tirage, soit en gagnant 200 euros au tirage.

D'où : $p(X = 190) = \dfrac{1}{250} = p(G \cap L_1) + p\left(\overline{G} \cap L_2\right) = p(G) \times p_G(L_1) + p\left(\overline{G}\right) \times p_{\overline{G}}(L_2) = \dfrac{1}{50} p_G(L_1) + \dfrac{49}{50} \times \dfrac{1}{490} = \dfrac{1}{50} p_G(L_1) + \dfrac{1}{500} = \dfrac{1}{250}$.

Donc $\dfrac{1}{50} p_G(L_1) = \dfrac{1}{250} - \dfrac{1}{500} = \dfrac{1}{500}$ et finalement : $p_G(L_1) = \dfrac{1}{500} \times 50 = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

b. De même on peut gagner 90 euros soit en gagnant uniquement 100 euros au grattage, soit 100 euros uniquement au tirage.

Donc $p(X = 90) = \dfrac{2}{125} = p(G \cap P) + p\left(\overline{P} \cap L_1\right) = p(G) \times p_G(P) + p_{\overline{P}}(L_1) = \dfrac{1}{50} p_G(P) + \dfrac{49}{50} \times \dfrac{1}{70} = \dfrac{1}{50} p_G(P) + \dfrac{7}{500} = \dfrac{2}{125}$.

Donc $\dfrac{1}{50} p_G(P) = \dfrac{2}{125} - \dfrac{7}{500} = \dfrac{1}{500}$, donc $p_G(P) = \dfrac{1}{500} \times 50 = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

c. • $p(X = -10) = p\left(\overline{G} \cap P\right) = \dfrac{49}{50} \times \dfrac{241}{245} = \dfrac{241}{250}$.

• $p(X = 290) = 1 - p(X = -10) - p(X = 90) - p(X = 190) = 1 - \dfrac{241}{250} - \dfrac{2}{125} - \dfrac{1}{250} = \dfrac{250 - 241 - 4 - 1}{250} \dfrac{4}{250} = \dfrac{2}{125}$.

Le tableau de la loi de probabilités de X est donc :

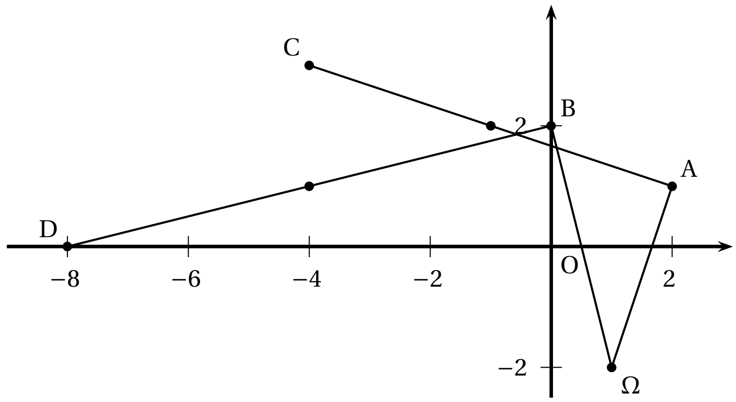
x_i	-10	90	190	290
$p(X = x_i)$	$\dfrac{241}{250}$	$\dfrac{4}{250}$	$\dfrac{1}{250}$	$\dfrac{4}{250}$

On a donc $E(X) = -10 \times \dfrac{241}{250} + 90 \times \dfrac{241}{250} + 190 \times \dfrac{1}{250} + 290 \times \dfrac{4}{250} = \dfrac{-2\,410 + 360 + 190 + 1\,180}{250} = -\dfrac{700}{250} = -\dfrac{14}{5} = -2,80$.

Sur un grand nombre de parties la perte moyenne par partie est de 2,80 €.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1.



2. **a.** On a $z_{A'} = (1+2i)(2+i) - 4 - 2i = 2 - 2 + i + 4i - 4 - 2i = -4 + 3i = z_C$. Donc $f(A) = C$.

$z_{B'} = (1+2i)(2i) - 4 - 2i = 2i - 4 - 4 - 2i = -8 = z_D$. Donc $f(B) = D$.

b. Ω d'affixe ω est un point fixe pour f si et seulement si $f(\Omega) = \Omega \iff$ $\omega = (1+2i)\omega - 4 - 2i \iff \omega(1-1-2i) = -4-2i \iff \omega = \dfrac{-4-2i}{-2i} = \dfrac{(2+i)}{i} = \dfrac{2i-1}{-1} = 1 - 2i$.

f admet donc un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = 1 - 2i$.

3. **a.** On a :

$\left\{\begin{array}{lcl} z' & = & (1+2i)z - 4 - 2i \\ \omega & = & (1+2i)\omega - 4 - 2i \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence) $z' - \omega = (1+2i)(z - \omega) \iff$ $z' - \omega = (1+2i)z - \omega - 2i\omega \iff z' = z + 2iz - 2i\omega \iff z' - z = 2i(z - \omega)$.

b. L'égalité précédente peut s'écrire puisque $z \neq \omega$, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = 2i$

- D'où en modules : $\dfrac{z'-z}{\omega - z}|| = |2i| \iff \dfrac{MM'}{\Omega M} = 2$.
- En argument $\arg\left(\dfrac{z'-z}{\omega - z}\right) = \arg(2i) \iff \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

c. On peut en déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M

❶ On part d'un point M ;
❷ On trace le segment $[\Omega M]$;
❸ On trace la demi-droite passant par M et indirectement perpendiculaire à $[\Omega M]$;
❹ Sur cette demi-droite à l'aide du compas on place M' tel que $MM' = 2M\Omega$.

On peut construire ainsi $f(A)$ et vérifier que $f(A) = C$.Même chose pour $f(B) = D$

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. **a.** Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$

La plus grande valeur possible pour a est le PGCD(882,945).

Or $945 = 882 \times 1 + 63$, donc PGCD(882,945) = 63.
On a aussi : $882 = 2 \times 441 = 2 \times 21^2 == 2 \times (3 \times 7)^2 = 2 \times 3^2 \times 7^2$.
$945 = 5 \times 189 = 5 \times 9 \times 21 = 3^3 \times 5 \times 7$.
Donc PGCD$(882, 945) = 3^2 \times 7 = 9 \times 7 = 63$.
Les valeurs possibles pour a sont les diviseurs communs à 882 et à 945 c'est à dire les diviseurs de 63, soit 1 ou 3 ou 7 ou 9 ou 21 ou 63.

b. Dans cette question,le volume de la boîte B est $v = 77\,760$.
On sait que pour remplir la boîte B la plus grande valeur possible de a est 12.
Le PGCD$(L,\ \ell) = 12$ d'où $L = 12x$ et $\ell = 12y$ avec x et y premiers entre eux.
On a donc $v = 77\,760 = 12x \times (12y)^2 = 12^3 \times xy = 1\,728xy^2$; donc
$xy^2 = 45 = 3^2 \times 5$.
Il y a deux possibilités : $\ell = 1$, donc $L = 45$ ou $\ell = 3$ et $L = 5$. Deux boîtes sont possibles :
- l'une avec $\ell = 12$, $L = 540$ et
- l'autre avec $\ell = 36$, $L = 60$.

2. a. Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$.
La plus petite arête c pour la caisse C est le PPCM$(882,\ 945) = \dfrac{882 \times 945}{\text{PGCD}(882,\ 945)} =$
$\dfrac{882 \times 945}{63} = 14 \times 945 = 13\,230$.
L'ensemble de toutes les valeurs possibles pour c est l'ensemble des multiples de 13 230 soit les nombres $13\,230k$, avec k entier naturel non nul.

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. et que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Donc 105 = PPCM$(L,\ \ell)$ donc $105 = Lx$ et $105 = \ell y$
Donc $v = 15\,435 = L\ell^2 = \left(\dfrac{105}{x}\right)^2 \times \left(\dfrac{105}{y}\right)$ d'où $15\,435x^2y = 105^3 = 1\,157\,625$
et enfin $x^2y = 75$.
Les diviseurs de 75 sont 1, 3, 5, 15, 25, 75
Une solution évidente $x = 3$, $y = 5$ et c'est la seule puisqu'il n'y a qu'un carré parmi les diviseurs de 75.
La boîte a donc pour dimension $\ell = 21$ et $L = 35$.

Problème **11 points**

Partie A : Résolution de l'équation différentielle

$$(1) : \qquad y' - 2y = x\mathrm{e}^x.$$

1. L'équation différentielle (2) : $\quad y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto A\mathrm{e}^{2x}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

2. a. $u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation (1)
si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = x\mathrm{e}^x \iff a\mathrm{e}^x + (ax + b)\mathrm{e}^x - 2(ax + b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \iff (a + ax + b - 2ax - 2b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \iff -ax + a - b = x$ (car $\mathrm{e}^x > 0$, est donc non nul), $\iff -a = 1 \quad$ et $\quad a - b = 0 \iff a = -1 \quad$ et $\quad b = -1$.
La fonction $u(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation (1).

b. La fonction v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = 0$.
u est une solution de (1) si set seulement si $u'(x) - 2u(x) - x\mathrm{e}^x = 0$; en ajoutant membre à membre ces deux équations on obtient :
$v'(x) - 2v(x) + u'(x) - 2u(x) - x\mathrm{e}^x = 0 \iff$
$u'(x) + v'(x) - 2(u(x) + v(x)) - x\mathrm{e}^x = 0 \iff$
$(u + v)'(x) - 2(u + v)(x) = x\mathrm{e}^x \iff u + v$ est solution de (1).

c. D'après le résultat précédent, f est solution de (1) si et seulement si $(f-u)+u$ est solution de (1) si et seulement si $f-u$ solution de (2) si et seulement si $f(x)-u(x) = A\mathrm{e}^{x}$ si et seulement si $f(x) = u(x) + A\mathrm{e}^{x}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Finalement $f(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{x} + A\mathrm{e}^{2x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

3. f est la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 si et seulement si $f(0) = 0 \iff 0 = (-0-1)\mathrm{e}^{0} + A\mathrm{e}^{2\times 0} \iff 1 = A$.

Donc la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 est $f(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^{x} - x - 2$.

1.

- On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
- On peut écrire pour $x \neq 0$, $g(x) = x\left(2\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, donc par somme et produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x, g est dérivable et

$g'(x) = 2\mathrm{e}^{x} - 1$.

- $g'(x) > 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} > 1 \iff \mathrm{e}^{x} > \frac{1}{2} \iff x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x > -\ln 2$.
- $g'(x) < 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} - 1 < 0 \iff 2\mathrm{e}^{x} < 1 \iff \mathrm{e}^{x} < \frac{1}{2} \iff x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff x < -\ln 2$.
- $g'(x) = 0 \iff x = -\ln 2$.

La fonction g est donc décroissante de plus l'infini à $f(-\ln 2) = 2\mathrm{e}^{-\ln 2} + \ln 2 - 2 = \dfrac{2}{2} + \ln 2 - 2 = \ln 2 - 1$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-\ln 2[$.

Et g est croissante de $f(-\ln 2) = \ln 2 - 1$ à plus l'infini sur l'intervalle $]-\ln 2\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. On a $g(0) = 2\mathrm{e}^{0} - 0 - 2 = 0$ donc 0 est une de ces solutions

b. g est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1,6\,;\,-1,5]$.

$g(-1,6) \approx 0,004$ et $g(-1,5) \approx -0,05$: la fonction g étant continue car dérivable sur l'intervalle $[-1,6\,;\,-1,5]$, il existe donc un réel unique $a \in]-1,6\,;\,-1,5[$ tel que $g(a) = 0$.

4. On peut donc des variations de g donner le signe de $g(x)$:

- sur $]-\infty\,;\,a[$, $g(x) > 0$;
- sur $]a\,;\,0[$, $g(x) < 0$;
- sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
- $g(a) = g(0) = 0$.

Partie C : Étude de la fonction principale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^{x}$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

$f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = 0$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = 1$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est dérivable comme somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - (x+1)\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{2x} - (x+2)\mathrm{e}^{x}$.

Or $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - x - 2\right)$ et comme $\mathrm{e}^{x} > 0$ quel que soit le réel x, $f'(x)$ a le même signe que $2\mathrm{e}^{x} - x - 2 = g(x)$.

On a vu à la question précédente le signe de $g(x)$ donc celui de $f'(x)$.

- sur $]-\infty\,;\, a[$, $f'(x) > 0$; f est croissante sur $]-\infty\,;\, a[$;
- sur $]a\,;\, 0[$, $f'(x) < 0$; f est décroissante sur $]a\,;\, 0[$;
- sur $]0\,;\, +\infty[$, $f'(x) > 0$; f est croissante sur $]0\,;\, +\infty[$;
- $f'(a) = f'(0) = 0$; f a deux extremums locaux.

Remarque : on aurait pu dire que $f'(x) = 2f(x) + x\mathrm{e}^{x}$, puisque f est solution de l'équation différentielle (1).

3. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff 2\mathrm{e}^{\alpha} - \alpha - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{\alpha+2}{2}$.

Donc $f(\alpha) = \mathrm{e}^{2\alpha} - (\alpha+1)\mathrm{e}^{\alpha} = \left(\mathrm{e}^{\alpha}\right)^2 - (\alpha+1)\mathrm{e}^{\alpha} = \left(\dfrac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1) \times \dfrac{\alpha+2}{2} =$
$\dfrac{\alpha^2 + 4 + 4\alpha - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4} = \dfrac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$.

On sait que $-1,6 < \alpha < -1,5 \Rightarrow 2,25 < \alpha^2 < 2,56$

De même $-1,6 < \alpha < -1,5 \Rightarrow -3,2 < 2\alpha < -3$, d'où par somme :

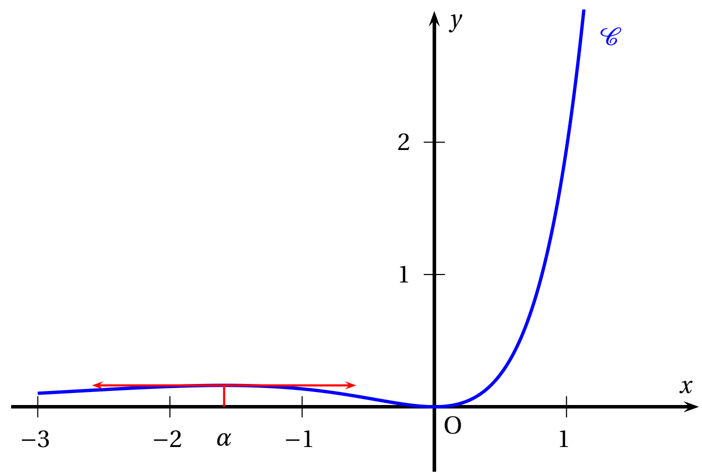
$-0,95 < \alpha^2 + 2\alpha < -0,44$ et $-\dfrac{0,95}{4} < \dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4} < -\dfrac{0,44}{4}$

ou $-0,2375 < \dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4} < -0,11$ et enfin $0,11 < -\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4} < 0,2375$.

4. Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(\alpha)$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				0		

5.



Partie D : Calcul d'aire

1. m étant un réel négatif, on a vu que sur $[m~;~0]$, $f(x) > 0$, donc l'intégrale de m à 0 de f est égale à l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation : $x = m$ et $x = 0$.

   L'unité d'aire valant 4 cm^2, il faudra multiplier par 4 l'intégrale pour avoir l'aire en cm^2.

2. **a.** On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$; toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[m~;~0]$; on peut donc intégrer par parties :
   $\displaystyle\int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_m^0 - \int_m^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right]_m^0 = 0 - 1 - m\mathrm{e}^m + \mathrm{e}^m =$
   $\displaystyle\int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^m(1-m) - 1.$

   b. $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_m^0 \left(\mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x = \int_m^0 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x - \int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int_m^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$
   $\displaystyle\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_m^0 - \left[x\mathrm{e}^x\right]_m^0 - \left[\mathrm{e}^x\right]_m^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2m} + 1 - \mathrm{e}^m - 1 + \mathrm{e}^m + m\mathrm{e}^m =$
   $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2m} + m\mathrm{e}^m.$

3. On sait que $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} \mathrm{e}^m = 0$, donc $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} \mathrm{e}^{2m} = \lim_{m\to-\infty} \left(\mathrm{e}^m\right)^2 = 0$, et que $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} m\mathrm{e}^m = 0$, donc par somme de limites :

$$\lim_{m\to-\infty} \int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$