Corrigé du baccalauréat STAV Métropole–La Réunion 15 juin 2018

La calculatrice est autorisée.

Les annexes A, B et C sont à rendre avec la copie après avoir été numérotées.

EXERCICE 1 — 6 points

L'escargot des haies (*Cepaea nemoralis*) est caractérisé par une coquille de couleur jaune ou de couleur rose. Certaines coquilles sont dépourvues de bandes, alors que d'autres sont décorées de bandes brunes longitudinales.
Parmi ses nombreux prédateurs, on compte la grive musicienne, très friande d'escargots.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans une haie d'arbustes, on considère une population d'escargots :

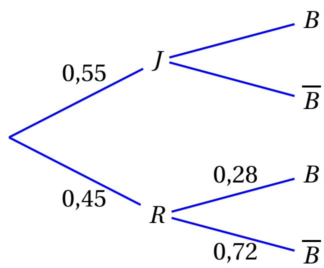
- 45 % ont une coquille de couleur rose, les autres sont jaunes ;
- Parmi les escargots à coquilles roses, 28 % ont des bandes brunes.

Une grive musicienne attrape un escargot de la haie d'arbustes au hasard. On considère que cela correspond à un prélèvement aléatoire d'un escargot parmi ceux de la haie.
On définit les évènements suivants :

- J : « l'escargot attrapé possède une coquille jaune » ;
- R : « l'escargot attrapé possède une coquille rose » ;
- B : « l'escargot attrapé possède une coquille pourvue de bandes brunes ».

Si l'escargot attrapé ne possède pas de bandes brunes, on dira dans la suite de cet exercice que sa coquille est unie et l'on notera $\overline{B}$ cet évènement.

1. Construisons un arbre de probabilités traduisant cette situation.



2. La probabilité que l'escargot attrapé possède une coquille rose avec des bandes brunes est notée :

   $p(R \cap B)$. $p(R\cap B) = p(R) \times p_R(B) = 0{,}45 \times 0{,}28 = 0{,}126$.

La moitié des escargots de la haie ont des coquilles comportant des bandes brunes.

3. **a.** Montrons que $p(J \cap B) = 0,374$.

   $p(B) = p(R\cap B) + p(J \cap B)$. Par conséquent $p(J\cap B) = p(B) - p(R\cap B) = 0{,}5 - 0{,}126 = 0{,}374$.

   b. Calculons $p\left(J \cap \overline{B}\right)$.

   $p(J) = p(J\cap B) + p\left(J\cap\overline{B}\right)$. Il en résulte $p\left(J\cap\overline{B}\right) = p(J) - p(J\cap B) = 0{,}55 - 0{,}374 - 0{,}176$.

   Nous obtenons bien $p\left(J\cap\overline{B}\right) = 0,176$.

4. **a.** L'escargot attrapé par la grive est de couleur jaune. La probabilité que l'escargot ait des bandes sur sa coquille est notée $p_J(B)$. $p_J(B) = \dfrac{p(J \cap B)}{p(J)} = \dfrac{0{,}374}{0{,}55} \approx 0{,}68$.

D'après les scientifiques, les escargots à coquille unie sont plus facilement repérés et donc mangés par les grives musiciennes, alors que les escargots avec des bandes brunes souffrent plus du soleil et de la chaleur.

b. La probabilité calculée en **4a** n'est pas cohérente avec l'affirmation des scientifiques puisque la probabilité que la grive attrape un escargot jaune à bande brune est largement supérieure à la probabilité que la grive attrape un escargot jaune à coquille unie.

Source : http ://www.cndp.fr/evolution-des-especes/.../lescargot-des-haies.html

Partie B

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

L'escargot petit-gris (*Helix aspersa aspersa*) est apprécié par certains gastronomes. En se promenant dans la nature, on peut en ramasser mais on ne repérera que les plus gros, les plus jeunes étant souvent trop petits à l'œil nu pour être distingués.
On considère la variable aléatoire X qui à tout escargot petit-gris repéré par un promeneur associe le diamètre en mm de sa coquille. On admettra que X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 4$.
La courbe de Gauss associée à X (ou courbe de densité de probabilité associée à X) est donnée en **annexe A**.

On laissera sur le graphique tout tracé utile justifiant la démarche.

1. Par lecture graphique, $\mu = 26$ puisque la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

2. On sait que $p(X \leqslant 18) = 0,023$. À l'aide de ce résultat et du graphique ou à l'aide d'une autre méthode que vous expliquerez, déterminons $p(18 \leqslant X \leqslant 34)$.

   $18 = 26 - 8 \quad 34 = 26 + 8$. Ce sont donc deux valeurs symétriques par rapport à 26

   donc $p(X \geqslant 34) = p(x \leqslant 18)$. $p(18 \leqslant X \leqslant 34) = 1 - 2p(X \leqslant 18) = 1 - 2 \times 0{,}023 = 0,954$

   remarque : $p(18 \leqslant X \leqslant 34) = p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,955$.

   La valeur obtenue, dans le contexte de l'exercice, est la probabilité que le diamètre de la coquille soit compris entre 18 et 34 mm.

   C'est l'aire de la partie hachurée sur le graphique donné en annexe A.

Selon la réglementation, le petit-gris ne peut être ramassé que s'il a une coquille de 30 mm de diamètre minimum.

3. Justifions qu'environ 15,9 % des escargots petit-gris repérés par des promeneurs dans la nature ont la taille qui convient pour être ramassés. Pour ce faire, calculons $p(X \geqslant 30)$.

   À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $p(X \geqslant 30) \approx 0{,}1587$. Cela correspond à environ 15,9 %.

   Remarque : $30 = \mu + \sigma$. $p(X \geqslant \mu + \sigma) = 0,5 - p(\mu \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ d'où $p(X \geqslant 30) = 0,5 - \dfrac{0{,}683}{2} = 0{,}1585$

Rappel : Si une variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ,
$P(\mu - \sigma \leqslant Y \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683; P(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,955; P(\mu - 3\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

EXERCICE 2 — 6,5 points

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 35\mathrm{e}^{-0{,}053x}$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminons la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 35\mathrm{e}^{-0{,}053x} = 0$ puisque $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$.

b. Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}_f$ est asymptote à l'axe des abscisses, au voisinage de plus l'infini.

2. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Calculons $f'(x)$ pour x appartenant à $[0~;~+\infty[$.
$f'(x) = 35 \times \left(-0,053\,\mathrm{e}^{-0,053x}\right) = -1,855\,\mathrm{e}^{-0,053x}$

b. Déterminons le signe de $f'(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. Il en résulte que pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, $f'(x) < 0$ comme produit d'un nombre strictement positif et d'un nombre strictement négatif.

c. Déterminons d'abord le sens de variation
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Sur $[0~;~+\infty[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Construisons le tableau de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
Variation de f	35	$\searrow$	0

3. **a.** Le tableau de valeurs donné en **Annexe A** y est complété.

b. $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le repère orthogonal de l'**Annexe B**.

PARTIE B

Le hérisson européen est une espèce menacée dont l'étude de la population a été surtout menée au Royaume-Uni. Les causes de cette disparition sont le trafic automobile, ainsi que l'utilisation de certains pesticides.
La fonction f étudiée dans la PARTIE A modélise l'évolution, au Royaume-Uni, du nombre de hérissons (exprimé en millions).
Les années sont numérotées à partir de 1950 en prenant $x = 0$ pour l'année 1950, $x = 1$ pour 1951, …, $x = 10$ pour 1960 et ainsi de suite.

1. Des études statistiques britanniques démontrent que la population de hérissons est passée d'environ 35 millions en 1950 à 1 million en 2017, au Royaume Uni.

En 1950 nous avons $x = 0$ et $f(0) = 35$. En 2017 nous avons $x = 67$ et $f(67) = 35\mathrm{e}^{-0,053\times 67} \approx 1,004$.

Nous retrouvons ces résultats.

2. **a.** Résolvons, par le calcul, l'inéquation $f(x) < 10$

$$35\mathrm{e}^{-0,053x} < 10$$
$$\mathrm{e}^{-0,053x} < \frac{10}{35}$$
$$\mathrm{e}^{-0,053x} < \frac{2}{7}$$
$$\ln \mathrm{e}^{-0,053x} < \ln\left(\frac{2}{7}\right)$$
$$-0,053x < \ln\left(\frac{2}{7}\right)$$
$$x > -\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{0,053}$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{0,053} \approx 23,637$$

L'ensemble solution de l'inéquation est $\left[-\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{7}\right)}{0{,}053}\ ;\ +\infty\right[$ soit en arrondissant à l'unité

$[24\ ;\ +\infty[$

b. Dans le contexte de l'exercice, ce résultat signifie qu'après 1974 (1950+24), la population de hérissons européens était inférieure strictement à dix millions.

Dans la question 3, toute démarche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.

3. En ne prenant en considération que le seul critère énoncé ci-dessous et les informations suivantes, expliquer dans quelle catégorie (vulnérable, en danger, en voie d'extinction) se situe le hérisson européen au Royaume-Uni depuis 1950.

L'Union Internationale pour la Conservation de la Nature (UICN) a établi plusieurs critères pour déterminer si une espèce est menacée ou non. En simplifiant, l'un d'entre eux précise :

– Une espèce est « vulnérable » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 30 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes.

– Une espèce est « en danger » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 50 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes.

– Une espèce est « en voie d'extinction » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 80 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes.

La durée de vie d'une génération de hérissons européens est de 4 à 5 ans et dans cet exercice, on prendra la valeur de 5 ans.

Sources : sauvonslesherissons.fr
et uicn. fr/liste-rouge-mondiale/

En calculant les différents taux d'évolution de la population soit sur une période de dix ans soit de quinze ans, en prenant pour éléments les calculs effectués à la question **3a** nous constatons que ce taux reste strictement compris entre 30 % et 80 %. Par conséquent nous pouvons affirmer que la population de hérissons est en danger au Royaume-Uni.
exemples : entre 1950 et 1965 une baisse de 54,9 %, entre 1955 et 1970 une baisse de 55 % de même qu'entre 1965 et 1980, enfin entre 1980 et 2005 une baisse de 73,24 %.

EXERCICE 3 (3,5 points)

Au 1er mars 2018, une piscicultrice possède un bassin central qui comporte 450 truites d'élevage. Elle estime que la population augmente de 2 % chaque mois grâce à des lots qu'elle achète ou des transferts entre bassins.
On modélise le nombre de truites dans le bassin central par la suite (u_n) où n est le nombre de mois écoulés depuis le 1er mars 2018. On a donc $u_0 = 450$.

1. À une augmentation de 2 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{2}{100}$ soit 1,02.
$u_1 = 450 \times 1,02 = 459$ et $u_2 = 459 \times 1,02 \approx 468$ (résultats donnés à l'unité près).

2. Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par 1,02, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme 450.
Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 450 \times 1,02^n$.

Pour des soucis de réglementation par rapport à la taille du bassin central, la piscicultrice doit transférer des truites vers un autre bassin dès que la population dépasse 500 truites. Elle souhaite donc avoir une idée du mois au cours duquel ce seuil sera atteint.

3. Résolvons $u_n \geqslant 500$.

$$450 \times (1,02)^n \geqslant 500$$
$$1,02^n \geqslant \frac{10}{9}$$
$$\ln(1,02^n) \geqslant \ln\left(\frac{10}{9}\right)$$
$$n\ln(1,02) \geqslant \ln\left(\frac{10}{9}\right)$$
$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}{\ln(1,02)}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{10}{9}\right)}{\ln(1,02)} \approx 5,32.$

Le seuil sera atteint au cours du cinquième mois soit au cours du mois d'août.

Remarque : si elle attend le mois de septembre ($n = 6$) le seuil aura été déjà dépassé

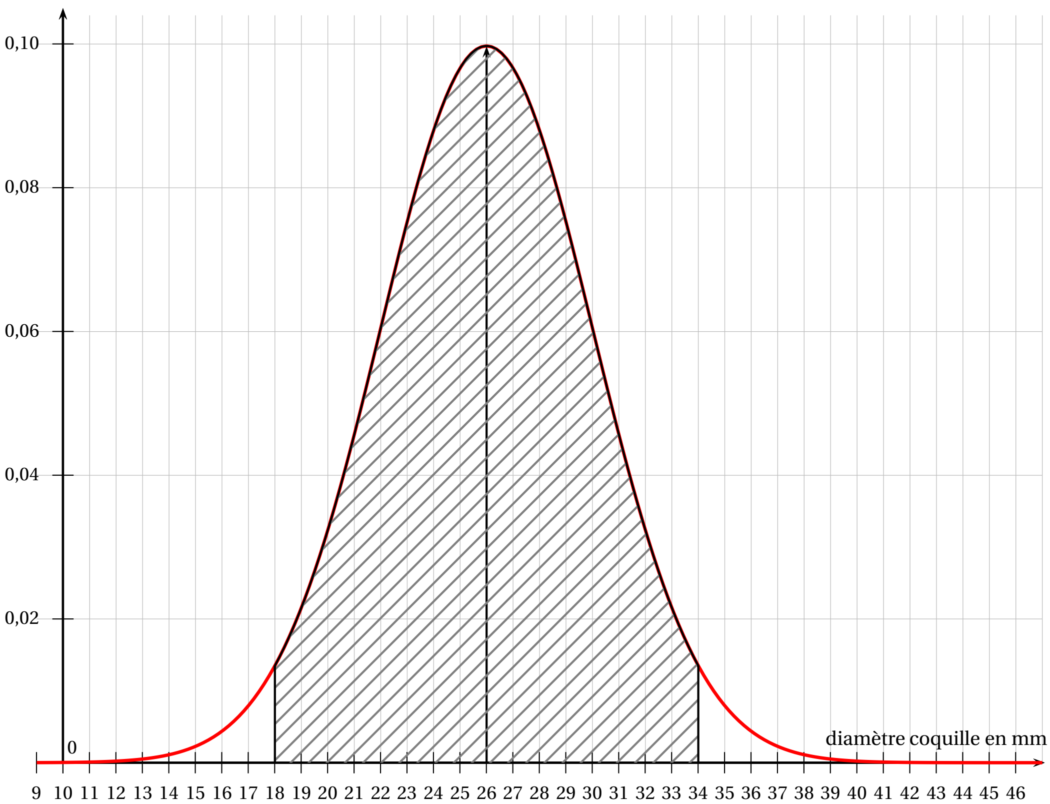
EXERCICE 4 **(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple donné en **Annexe C**, dont les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

ANNEXE A (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1



Courbe de Gauss associée à X.

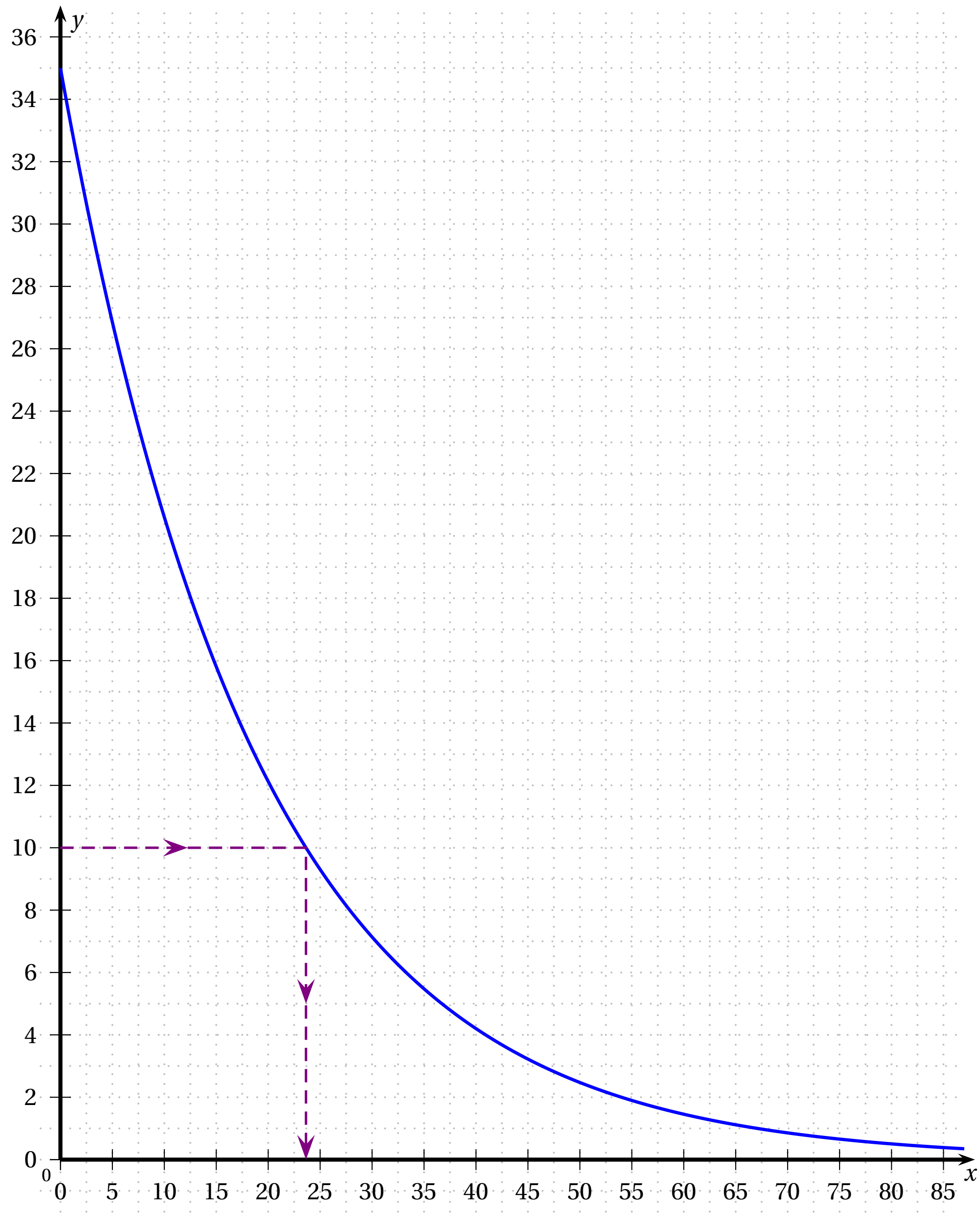
EXERCICE 2

x	0	5	10	15	20	30	40	55	70
$f(x)$	35	26,9	20,6	15,8	12,1	7,1	4,2	1,9	0,9

les résultats sont arrondis au dixième.

ANNEXE B (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2



ANNEXE C (à compléter, numéroter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 4

Pour chaque question, entourer la réponse exacte.

remarque : l'ensemble de définition des fonctions f et g a été changé par rapport au texte original donnant $[0\ ;\ +\infty[$.

1. On considère la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$. La fonction dérivée f' est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

   a. $\cancel{f'(x) = \ln(x)}$ **b.** $\cancel{f'(x) = 1}$ **c.** $\boxed{f'(x) = 1 + \ln(x)}$ **d.** $\cancel{f'(x) = \ln(x) - 1}$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

   a. $\cancel{y = g'(1) + g(1)(x-1)}$ **b.** $\cancel{y = ex}$ **c.** $\cancel{0}$ **d.** $\boxed{y = x - 1}$.

3. La valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est :

   a. $\boxed{\ln(2)}$ **b.** $\cancel{0{,}6931471806}$ **c.** $\cancel{-0{,}5}$ **d.** $\cancel{1}$.

4. On considère l'algorithme suivant où $\binom{N}{K}$ est un coefficient binomial qui se lit « K parmi N ».

Variables
N est du type nombre entier
P est du type nombre réel
S est du type nombre réel
Initialisation
N prend la valeur 12
P prend la valeur 0,1
S prend la valeur 0
Traitement
Pour K allant de 0 à 3 faire
$\quad$ S prend la valeur $S + \binom{N}{K} \times P^K \times (1-P)^{N-K}$
Fin de Pour
Sortie
Afficher S

Le résultat arrondi à 10^{-3} près de S donné par l'algorithme est :

a. $\cancel{0{,}282}$ **b.** $\boxed{0{,}974}$ **c.** $\cancel{0{,}999}$ **d.** $\cancel{1}$.