∽ Corrigé du baccalauréat STAV Nouvelle Calédonie ∾ novembre 2017

La calculatrice est autorisée.

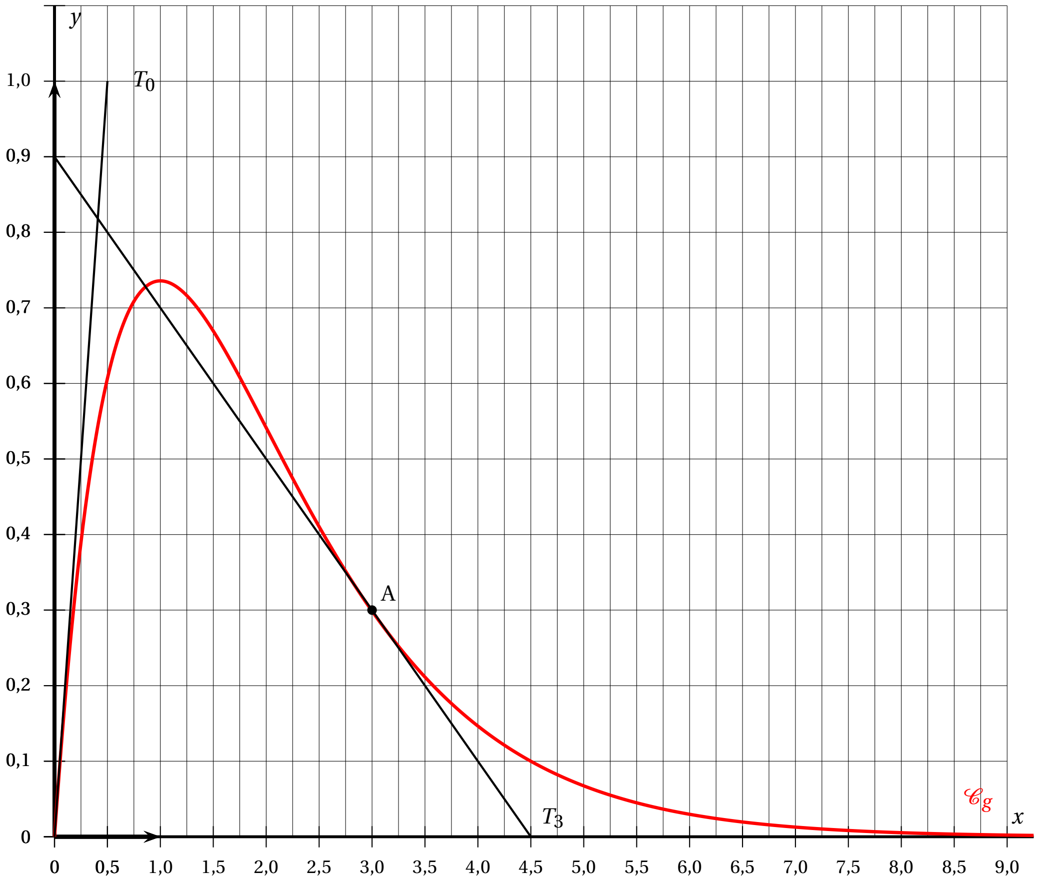
L'annexe A est à rendre avec la copie après avoir été numérotée

Exercice 1 — 5 points

On injecte une dose médicamenteuse à un animal à l'instant $x = 0$.

On note $g(x)$ la concentration, exprimée en mg/L, de substance présente dans le sang à l'instant x exprimé en heure.

La représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans un repère orthogonal d'origine O est donnée ci-dessous :



T_0 est la tangente à $\mathscr{C}_g$ en 0 et $T3$ est la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A d'abscisse 3.

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

À l'aide de ces informations et des éléments graphiques disponibles :

1. Avec la précision permise par le graphique, en lisant l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0,5, nous trouvons $g(0,5) = 0,6$.

   Cette valeur, dans le contexte de l'exercice, peut être considérée comme la concentration en mg/L de la substance dans le sang une demi-heure après l'injection.

2. Donnons la limite de la fonction g en $+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ puisque l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

   Ce résultat, dans le contexte de l'exercice, signifie que la concentration tend vers 0, lorsque la durée devient de plus en plus grande.

3. Écrivons le coefficient directeur de tangente en 3 à la courbe
$g'(3) = \dfrac{0,1-0,3}{4-3} = -0,2$, de même $g'(0) = \dfrac{1-0}{0,5-0} = 2$.

4. On admet que $g'(x)$ représente la vitesse d'absorption du médicament lorsque $g'(x) \geqslant 0$.
Nous pouvons parler de vitesse d'absorption sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ puisque sur cet intervalle la fonction g est croissante donc sa dérivée est positive.

EXERCICE 2 **6 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4} près.

Un producteur de fraises conditionne manuellement sa cueillette en barquettes de 500 g.

Partie A

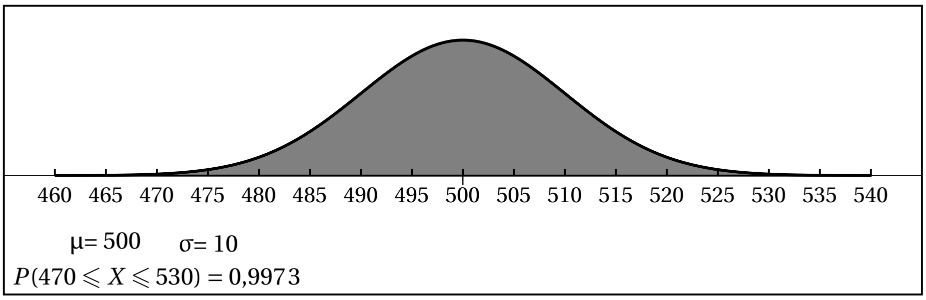
On note X la variable aléatoire associée à la masse de fraises par barquette.
On admet que la variable aléatoire X est distribuée suivant la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 20$.
On estime que la masse de fraises dans la barquette est conforme lorsqu'elle est comprise entre 470 g et 530 g.

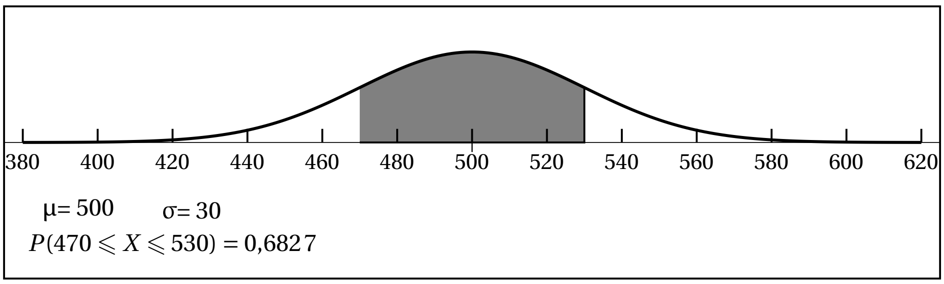
1. La probabilité que la barquette ait une masse de fraises conforme est notée : $p(470 \leqslant X \leqslant 530)$.
$p(470 \leqslant X \leqslant 530) = p(X \leqslant 530) - p(X \leqslant 470) = 0,9332 - 0,0668 = 0,8664$

On pourra utiliser la calculatrice ou le tableau donné ci-dessous

x	460	470	480	490	500	510	520	530	540
$P(X < x)$	0,0228	0,0668	0,1587	0,3085	0,5	0,6915	0,8413	0,9332	0,9773

2. On donne deux courbes de Gauss de paramètre $\mu = 500$ et ayant des valeurs de σ différentes.
Si nous voulons avoir davantage de barquettes avec des masses conformes il vaut mieux diminuer σ puisque la probabilité que X soit comprise entre 470 et 530 sera plus grande ce que montre les deux courbes ci-dessous.





Partie B

On fait l'hypothèse que la proportion p de barquettes livrées par le producteur dont la masse de fraises est non conforme est égale à $0,07$.
Afin de contrôler le conditionnement des fraises, un échantillon de 120 barquettes est prélevé. Le prélèvement est assimilé à un prélèvement avec remise, car il est effectué parmi un très grand nombre.

On rappelle que :
L'intervalle de fluctuation asymptotique à $0,95$ d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, lorsque la proportion p est connue, est :

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à $0,95$ de la fréquence de barquettes non conformes dans un échantillon de 120 barquettes.
   $n = 120 > 30 \quad np = 8{,}4 > 5 \quad np(1-p) = 7{,}812 > 5$

   $$\left[0{,}07-1,96\sqrt{\frac{0{,}07(1-0{,}07)}{120}}\ ;\ 0{,}07+1,96\sqrt{\frac{0{,}07\times 0{,}93}{120}}\right] = [0{,}0244\ ;\ 0{,}1156]$$
   .
2. Sur les 120 barquettes contrôlées, 8 ont une masse non conforme.
   La proportion de barquettes non conformes livrées par le producteur est de $\frac{8}{120}$ soit $\frac{1}{15} \approx 0{,}0667$. Cette proportion appartient bien à l'intervalle de fluctuation à 95 %.
   Nous pouvons considérer que la proportion de barquettes non conformes livrées par le producteur est bien de $0,07$.

Partie C

L'étiquetage des barquettes peut présenter deux défauts indépendants :

— Le défaut A : le code barre est illisible.

— Le défaut B : le nom du producteur n'apparaît pas sur la barquette.

On a observé que 3 % des barquettes possèdent le défaut A, et que 10 % possèdent le défaut B.
On prélève au hasard une barquette.

1. La probabilité que cette barquette possède les deux défauts est $P(A\cap B)$.
   Puisque les événements sont indépendants, $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ donc
   $p(A\cap B) = \dfrac{3}{100}\times\dfrac{10}{100} = \dfrac{3\times 10}{100\times 100} = 0,003.$
2. Calculons la probabilité que cette barquette comporte au moins un des deux défauts.

   Pour ce faire, calculons la probabilité de l'événement contraire :

   « la barquette n'a aucun défaut ».

   $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = (1-0{,}03)\times(1-0{,}90) = 0{,}97\times 0{,}90 = 0{,}873$

   Il en résulte $p\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\right) = 1 - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - 0{,}873 = 0{,}127$

EXERCICE 3 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples, donné en ANNEXE A (à rendre avec la copie).
Pour chaque proposition, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

EXERCICE 4 — 5 points

On admet que, suite à l'ingestion du lait maternel, le taux global d'anticorps en grammes par litre, présent dans le sang d'un animal, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,12]$ par :

$$f(t) = 0,75t + 9 - 10\ln(0,12t + 1)$$

où t est le temps exprimé en mois.

1. Le taux d'anticorps à la naissance est $f(0)$. $f(0) = 9$.
2. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous.

Calcul Formel
Dérivée $[f]$
$\rightarrow f'(t) = \dfrac{0,09t - 0,45}{0,12t + 1}$

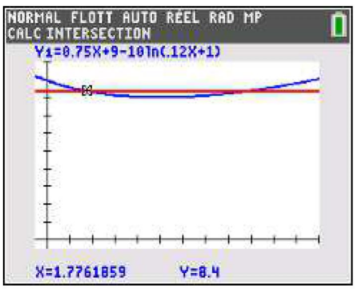
Calcul Formel
Résoudre $\left[\dfrac{0,09t - 0,45}{0,12t + 1} \leqslant 0\right]$
$\rightarrow -\dfrac{25}{3} < t \leqslant 5$

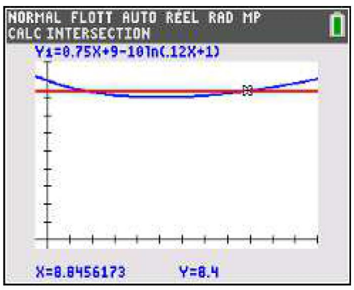
a. $f'(t) = 0,75 - 10 \times \dfrac{0,12}{0,12t + 1} = \dfrac{0,75 \times 0,12t + 0,75 - 1,2}{0,12t + 1} = \dfrac{0,09t - 0,45}{0,12t + 1}$.
Par conséquent, l'expression de la dérivée obtenue par le logiciel est correcte.

b. Étudions le sens de variation de f sur $[0\,;\,12]$. Des résultats du logiciel, nous pouvons déduire que : sur $[0\,;\,5[$, $f'(t) < 0$ et sur $]5\,;\,12]$, $f'(t) > 0$.
Si pour tout $t \in I$, $f'(t) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Sur $[0\,;\,5[$, $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $t \in I$, $f'(t) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Sur $]5\,;\,12]$, $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

c. Déterminons l'âge, en mois où l'animal est le plus vulnérable aux infections, c'est-à-dire l'âge pour lequel son taux d'anticorps est le plus bas.
D'après le sens de variation f admet un minimum en 5. Il en résulte que l'âge où l'animal est le plus vulnérable est de cinq mois.
$f(5) = 0,75 \times 5 + 9 - 10\ln(0,12 \times 5 + 1) \approx 8,05$.
Le taux correspondant est, à 10^{-2} près, 8,05 g/L.

3. Voici deux captures d'écran d'une calculatrice :





Sur ces fenêtres, on voit :

— la courbe représentative de f sur $[0\,;\,12]$;

— la droite d'équation $y = 8,4$;

— les points d'intersection de cette courbe et de cette droite symbolisés par une croix avec leurs coordonnées.

Cet animal a un taux d'anticorps inférieur à 8,4 g/L sur l'intervalle [2; 8] (temps exprimé en mois entier).

Nous lisons sur le premier écran la borne inférieure de l'intervalle c'est-à-dire 1,77 qui, arrondie à l'entier supérieur vaut 2. Nous lisons sur le second écran la borne supérieure de l'intervalle c'est-à-dire 8,8456 qui, arrondie à l'entier inférieur vaut 8.

ANNEXE A (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 :

Un biologiste étudie une population de truites.
On note u_n le nombre de truites en $2017 + n$.
On admet que la suite (u_n) est définie par :
$u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n par
$u_{n+1} = 0,8u_n$.
On donne l'algorithme ci-contre :

```
Initialisation :
   N prend la valeur 0
   U prend la valeur 400
Traitement :
Tant que U > 100
   N prend la valeur N + 1
   U prend la valeur 0,8 × U
Fin Tant que
Sortie :
   Afficher N
```

Cocher, pour chaque proposition, la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.

Question 1 :

- ☐ ~~La suite (u_n) est arithmétique~~
- ☑ La suite (u_n) est géométrique
- ☐ ~~La suite (u_n) est constante~~
- ☐ ~~La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique~~

Question 2 :
La valeur affichée par l'algorithme est :

- ☐ ~~6~~
- ☑ 7
- ☐ ~~83~~
- ☐ ~~84~~

Question 3 :
Cet algorithme permet d'obtenir :

- ☐ ~~La valeur de u_{100}~~
- ☐ ~~Les 100 premières valeurs de la suite (u_n)~~
- ☐ ~~Le nombre de termes supérieurs à 100~~
- ☑ Le plus petit rang N pour lequel $U \leqslant 100$

Question 4 :
Une fois l'algorithme exécuté, on a :

- ☐ ~~$U = 100$~~
- ☐ ~~$U > 100$~~
- ☐ ~~$U \geqslant 100$~~
- ☑ $U \leqslant 100$