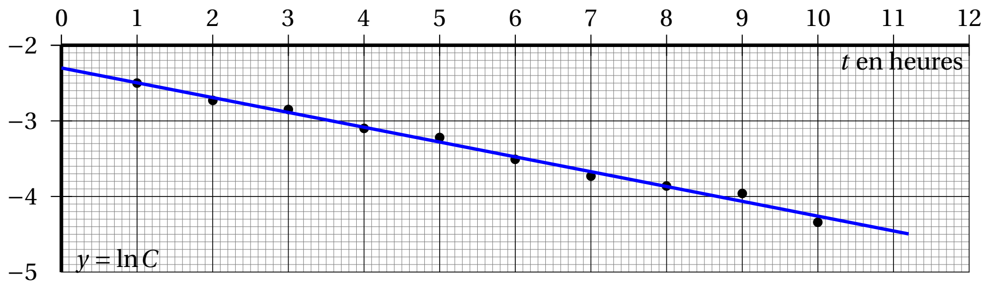
Corrigé du baccalauréat STL biotechnologies Polynésie
15 juin 2017

EXERCICE 1 **4 points**

1. Voir l'annexe.

2.



3. La calculatrice donne $a \approx -0,196$ et $b \approx -2,3$.

Une équation de la droite d'ajustement est donc :

$$y = -0,196t - 2,3.$$

Dans la suite, on retient comme droite d'ajustement la droite Δ d'équation : $y = -0,2t - 2,3$.

4. Voir ci-dessus.

5. On lit au mieux au centième $\ln C \approx -4,46$ soit $C \approx 0,012$ millimoles par litre.

6. On a $y = \ln C - 0,2t - 2,3 \iff C = \mathrm{e}^{-0,2t-2,3} \iff C = \mathrm{e}^{-2,3} \times \mathrm{e}^{-0,2t}$.

Or $\mathrm{e}^{-2,3} \approx 0,100259 \approx 0,100$ au millième près. Donc finalement l'ajustement est :

$$C = 0,1\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

7. Il faut résoudre l'inéquation :

$0,1\mathrm{e}^{-0,2t} < 0,001 \iff \mathrm{e}^{-0,2t} < 0,01 \iff -0,2t < \ln 0,01 \iff t > \dfrac{\ln 0,01}{-0,2} \approx 23,02.$

La concentration sera inférieure à $0,001$ millimole après un peu plus de 23 heures.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Chaque année la masse de déchets non recyclables doit baisser de 3 %. On a donc pour $n \geqslant 0$, $p_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{100}\right) p_n = \frac{97}{100} p_n = 0,97 p_n$.

La relation $p_{n+1} = 0,97 p_n$ signifie que la suite $\left(p_n\right)$ est une suite géométrique dont le premier terme est $p_0 = 30$ et dont la raison est égale à $q = 0,97$.

2. On sait que pour tout $n \geqslant 0$, $p_n = p_0 \times q^n = 30 \times 0,97^n$.

3. 2026 correspond à $n = 11$, d'où $p_{11} = 30 \times 0,97^{11} \approx 21,4590$ soit environ 21,459 tonnes au kilo près.

4.
- **a.** Voir l'annexe.
- **b.** La valeur affichée en sortie représente le total des déchets non recyclables sur la période de 5 ans.

5.
- **a.** Voir l'annexe.

b.

n	u	S
1	29,10	59,10
2	28,23	87,33
3	27,38	114,71
4	26,56	141,27
5	25,76	167,03
6	24,99	192,82
7	24,24	216,26
8	23,51	239,77
9	22,81	262,58
10	22,12	284,7

Pour $n = 11$, le total dépassera les 300 tonnes, soit en 2026.

EXERCICE 3 — 5 points

1. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1000\mathrm{e}^{-0,04t} = 0$ et enfin $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1200$, ce qui montre géométriquement que la droite horizontale dont une équation est $y = 1200$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** Voir la figure à la fin.
   On lit au bout de 40 heures un peu moins de 1 000 individus.

   b. Il faut résoudre l'équation $f(t) = 5\times f(0) = 5\times 200 = 1000 \iff 1200 - 1000\mathrm{e}^{-0,04t} = 1000 \iff 200 = 1000e - 0,04t \iff$
   $\dfrac{1}{5} = \mathrm{e}^{-0,04t} \iff \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = -0,04t \iff t = \dfrac{\ln\frac{1}{5}}{0,04} \iff t \approx 40,24$ soit environ 40 heures et 14 minutes.

3. **a.** Pour tout réel t positif ou nul, $f'(t) = -1000\times(-0,04)\mathrm{e}^{-0,04t} = 40\mathrm{e}^{-0,04t}$.

   b. On a donc $f'(50) = 40\mathrm{e}^{-0,04\times 50} = 40\mathrm{e}^{-2} \approx 5,41$, soit 5,4 au dixième près.

   c. En partant du point $(50\,;\,f(50))$ de la tangente on retrouve un autre point de cette tangente en se déplaçant horizontalement de 1 et verticalement de 5,4 ou respectivement de 10 à droite et 54 vers le haut. Voir la figure avec $f(50) \approx 1065$.

   d. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} = \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = 0$: ceci signifie que le nombre dérivé (ou la pente de la tangente) décroit et tend vers 0.
   La tangente se rapproche donc de l'horizontale.

EXERCICE 4 — 7 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

PARTIE A

1. On prélève de façon indépendante 200 flacons et la probabilité à chaque tirage d'avoir un flacon défectueux est de $0,07$: la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,07$.

2. On sait que $p(X = 10) = \binom{200}{10}\times 0,07^{10}\times 0,93^{200-10} = \binom{200}{10}\times 0,07^{10}\times 0,93^{190} \approx 0,065$ au millième près.

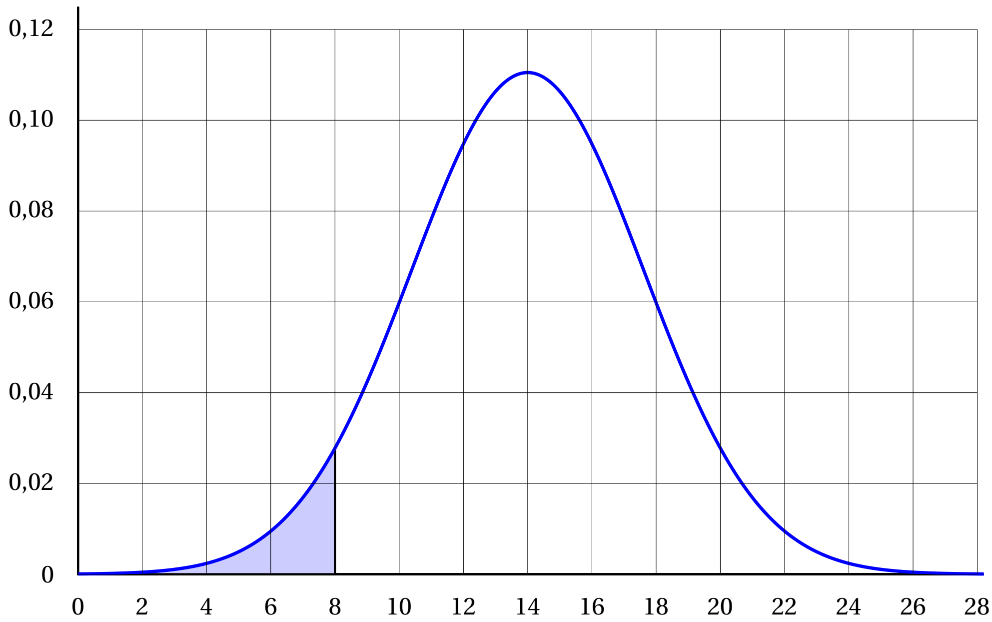
3. On sait que $E = n\times p = 200\times 0,07 = 14$.
   Ceci signifie que sur un grand nombre de tirages la moyenne de flacons défectueux se rapprochera de 14.

4. L'écart type de la variable aléatoire X est $\sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{20 \times 0,07 \times 0,93} = \sqrt{13,02} \approx 3,608\,3$.

   L'écart type de la variable aléatoire X est donc au millième près 3,608.

PARTIE B

1. On retrouve les valeurs précédentes trouvées dans la partie A pour la variance et l'écart type.
2. La calculatrice donne $p(Y \leqslant 15) \approx 0,609\,1$, donc la probabilité qu'un prélèvement de 200 flacons contienne au moins 15 flacons non conformes est environ $0,391$.



Par symétrie $P(Y \geqslant 20) = P(Y \leqslant 8) = 0,048$.

Donc $P(8 \leqslant y \leqslant 20) = 1 - P(Y \leqslant 8) - P(Y \leqslant 20) = 1 - 0,048 - 0,048 = 0,904$.

PARTIE C

1. **a.** On a $n = 400 \geqslant 30$, $np = 400 \times 0,07 = 28 > 5$ et $n(1-p) = 400 \times 0,93 = 372 > 5$.

   On peut donc calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des flacons conformes dans un échantillon de 400 flacons :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = [0,045\ ;\ 0,095].$$

   b. La fréquence est donc $\dfrac{36}{400} = \dfrac{9}{100} = 0,09$.

   Comme $0,09 \in I$ on ne peut pas remettre en question la confiance de cette enseigne de parfumerie envers son entreprise.

2. **a.** On a $I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{0,07(1-0,07)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{0,07(1-0,07)}{n}}\right] =$
   $\left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{n}}\right]$; la longueur de cet intervalle est égale à :
   $1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{n}} - \left(-1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{n}}\right) = 2 \times 1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{n}}$.

b. Le logiciel montre que l'intervalle de fluctuation asymptotique a une longueur inférieure ou égale à $0,02$ pour $N \geqslant 2\,500,8$

Il faut donc N soit au moins égal à $2\,501$.

ANNEXE 1 : Exercice 1 (à rendre avec la copie)

Temps t_i en heures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration C_i en millimoles par litre	0,082	0,065	0,058	0,045	0,040	0,030	0,024	0,021	0,019	0,013
$y_i = \ln(C_i)$	$-2,50$	$-2,73$	$-2,85$	$-3,1$	$-3,22$	$-3,51$	$-3,73$	$-3,86$	$-3,96$	$-4,34$

ANNEXE 2 : Exercice 2 (à rendre avec la copie)

4. a.

n	u	S
1	29,10	59,10
2	28,23	87,33
3	27,38	114,71
4	26,56	141,27
5	25,76	167,03
6	24,99	192,82
7	24,24	216,26
8	23,51	239,77
9	22,81	262,58
10	22,12	284,7

5. a.

Variables :
n entier naturel
u et S réels
Initialisation :
u prend la valeur 30
S prend la valeur 30
n prend la valeur 0
Traitement :
Tant que $S \leqslant 300$ faire
    u prend la valeur $0,97 \times u$
    S prend la valeur $S + u$
    n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher n

ANNEXE 3 : Exercice 3 (à rendre avec la copie)