∽ Corrigé du concours de contrôleur des douanes 23 février 2014 ∾

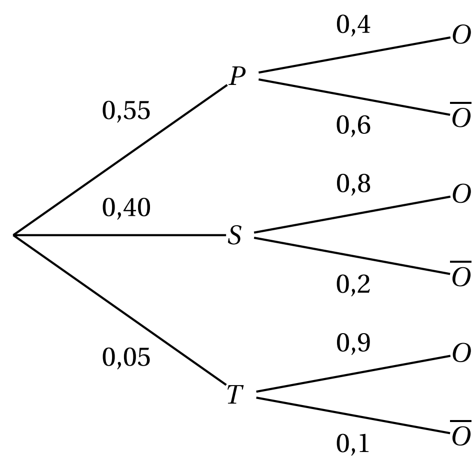
Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice 1

1. • Sur les 55 % candidats à leur première tentative, 40 % concouraient pour la branche des opérations commerciales, donc $p_P\left(\overline{O}\right) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$.
   • $p_S(O) = 0,8$ (énoncé) ;
   • $p_T\left(\overline{O}\right) = 0,10$ (énoncé).
2.



3. Il faut calculer $p(P \cap O) = p(P) \times p_P(O) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$.
4. On calcule de même : $p(S \cap O) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$ et $p(T \cap O) = 0,05 \times 0,9 = 0,045$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(O) = p(P \cap O) + p(S \cap O) + p(T \cap O) = 0,22 + 0,32 + 0,045 = 0,585$.
5. Il faut trouver $p_O(P) = \dfrac{p(O \cap P)}{p(O)} = \dfrac{p(P \cap O}{p(O)} = \dfrac{0,22}{0,585} \approx 0,376$.
6. On suppose qu'il y a assez de candidats pour que les choix d'un candidat soit une épreuve indépendante des autres : la probabilité de choisir 3 candidats de la branche des opérations commerciales est donc $0,585^3 \approx 0,200$ au millième près.

Exercice 2

Soit

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(on ne cherchera pas à expliciter $f(x)$)

1. On sait que quel que soit x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
$f'(x)$ quotient de termes positif est positive donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On a $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ intégrale sur un intervalle de largeur nulle, cette intégrale est nulle : $f(0) = 0$. O $\in \mathscr{C}$.

3.
$$g(x) = f(\tan x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
g est dérivable comme fonction composée de fonctions dérivables et
$g'(x) = f'(\tan x) \times (\tan x)' = \dfrac{1}{1+\tan x^2} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{1} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1.$
On a donc $g(x) = x + K$, avec $K \in \mathbb{R}$ et comme $g(0) = K = f(0) = 0$, on a $g(x) = x$.

4.

- Avec $\tan x = 1$, on a $x = \dfrac{\pi}{4}$, donc $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}$.
- Avec $\tan x = \sqrt{3}$, on a $x = \dfrac{\pi}{3}$, donc $f(\sqrt{3}) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{3}$.

5. La fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et à valeurs dans cet intervalle, donc la fonction $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$.
Enfin la fonction h est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour $x \in]0~;~+\infty[$, $h'(x) = f'(x) + f'\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0.$
$h'(x) = 0$ sur $]0~;~+\infty[$ entraîne $h(x) = K$, $K \in \mathbb{R}$.
En particulier : $h(1) = f(1) + f\left(\frac{1}{1}\right) = 2f(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4}$ (d'après la question précédente), donc $h(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
Quel que soit $x \in]0~;~+\infty[$, $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ (f est dérivable donc continue en 0)
On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

7.

Exercice 3

Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes d'équations respectives
$$y = x^3 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{x}$$
Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse x ont un coefficient directeur égal à $3x^2 \geqslant 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}'$ en un point d'abscisse x' ont un coefficient directeur égal à $-\dfrac{1}{x'^2} < 0$, quel que soit $x' \in \mathbb{R}$.