Corrigé du baccalauréat STI2D/STL spécialité SPCL
Métropole–La Réunion 8 septembre 2016

EXERCICE 1 — 6 points

Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300 °C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26 °C par un système de ventilation.
La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre 10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont les suivantes :

- Sans couture.
- Très doux et confortables.
- Température maximale d'utilisation : 240 °C.

1. **a.** La température des plaques à la sortie du four est de 300 °C.

b. À la sortie du four, la température des plaques diminue au cours du temps.

c. La température des plaques devrait se stabiliser à la température ambiante, soit 26 °C.

2. La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en minutes, par la fonction g est définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par
$g(t) = 274\,\mathrm{e}^{at} + 26$ où a est un nombre réel.

a. $g(0) = 274\,\mathrm{e}^{0} + 26 = 274 + 26 + 300$. Ce résultat est conforme aux données puisque 300 °C est la température à la sortie du four, soit au temps $t = 0$.

b. D'après la question 1, la fonction g doit être décroissante sur $[0~;~+\infty[$ donc le réel a doit être négatif.

c. On sait que 3 minutes après sa sortie du four la température de la plaque, arrondie à l'unité, est de 262 °C; cela veut dire que $g(3) = 262$. On cherche a pour que $g(3) = 262$:

$$g(3) = 262 \iff 274\,\mathrm{e}^{3a} + 26 = 262 \iff 274\,\mathrm{e}^{3a} = 236 \iff \mathrm{e}^{3a} = \frac{236}{274} \iff 3a = \ln\left(\frac{236}{274}\right)$$

$$\iff a = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{236}{274}\right) \text{ donc } a \approx -0{,}05.$$

3. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$: $g(t) = 274\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 26$.

a. Avec les gants actuellement utilisés, l'ouvrier manipule les plaques au bout de 10 minutes donc à la température : $g(10) = 274\,\mathrm{e}^{-0{,}5} + 26 \approx 192{,}2$ °C.

b. Si les ouvriers sont équipés avec les nouveaux gants, ils pourront sortir les plaques dès qu'elles atteignent la température de 240 °C. On cherche donc t tel que $g(t) \leqslant 240$:

$$g(t) \leqslant 240 \iff 274\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 26 \leqslant 240 \iff 274\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} \leqslant 214 \iff \mathrm{e}^{-0{,}05t} \leqslant \frac{214}{274}$$

$$\iff -0{,}05t \leqslant \ln\left(\frac{214}{274}\right) \iff t \geqslant -\frac{1}{0{,}05}\ln\left(\frac{214}{274}\right) \text{ donc } t \geqslant 4{,}9 \text{ minutes.}$$

Les ouvriers pourront manipuler les plaques 4,9 minutes après leurs sorties du four.

c. Passer de 10 min à 4,9 min représente un gain de 5,1 min sur 10 min, soit un gain de 51 %.

EXERCICE 2 — 4 points

Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes.
La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est 0,04.
Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est livré à une entreprise spécialisée dans le conditionnement des légumes. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine métallurgique est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise de 200 boîtes.

PARTIE A

La variable aléatoire X désigne le nombre de boîtes non conformes dans un tel lot.

1. On est dans le cas d'une répétition de 200 épreuves indépendantes qui n'ont que 2 issues; donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}04$.
2. La probabilité qu'un tel lot contienne exactement quatre boîtes non conformes est :
   $P(X = 4) = \binom{200}{4} 0{,}04^4\ (1-0{,}04)^{200-4} \approx 0{,}055$.

PARTIE B

On décide d'approcher la loi binomiale suivie par X par la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2{,}77$.

1. La moyenne est $\mu = np = 200 \times 0{,}04 = 8$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7{,}68} \approx 2{,}77$.
2. À l'aide de la loi normale de paramètres $\mu = 8$ et $\sigma = 2{,}77$:
   a. $P(6 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0{,}530$.
   La probabilité que, sur 200 boîtes, il y en ait entre 4 et 10 de non conformes est de 0,530.
   b. $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}074$

PARTIE C

Dans le lot livré de 200 boîtes, on compte 11 boîtes non conformes soit une fréquence de $f = \dfrac{11}{200} = 0{,}055$.
$n = 200 \geqslant 30$, $np = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 192 \geqslant 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0{,}04 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}04 \times 0{,}96}{200}}\ ;\ 0{,}04 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}04 \times 0{,}96}{200}}\right]$$
$$\approx \left[0{,}012\ ;\ 0{,}068\right]$$

La fréquence f des boîtes non conformes est de 0,055; or f appartient à l'intervalle de fluctuation donc le fabriquant n'a pas de raison de s'inquiéter.

EXERCICE 3 — 3 points

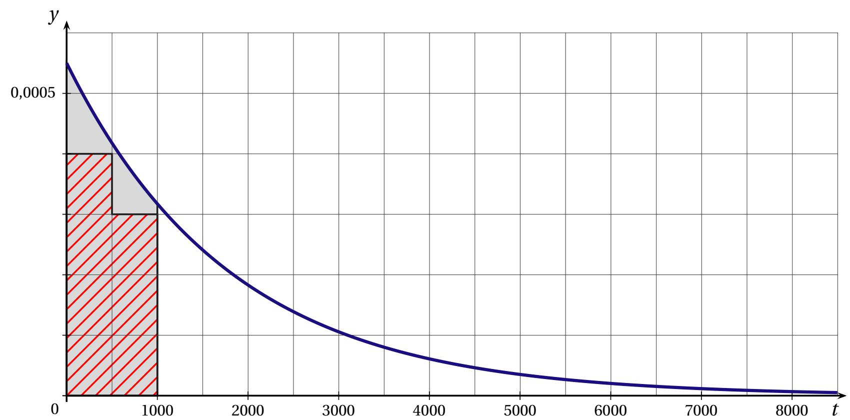
1. **Proposition 1 :** $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}} = i\sqrt{2}$.

   $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   donc $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = i\sqrt{2}$.

   Proposition 1 vraie

2. La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5{,}5 \times 10^{-4}$ et dont la fonction de densité de probabilité est représentée ci-dessous.



   Proposition 2 : la probabilité, arrondie à 0,01 près, qu'un composant électronique pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1 000 heures est 0,35.

   On peut justifier la réponse de deux façons.

   - On sait que $P(T \leqslant 1000)$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équations $t = 0$ et $t = 1\,000$; c'est l'aire de la partie grisée sur la figure.
     La partie hachurée sur la figure représente 7 rectangles dont chacun a une aire de $0{,}000\,1 \times 500 = 0{,}05$; l'aire de la partie hachurée est donc $7 \times 0{,}05 = 0{,}35$.
     Cette partie hachurée a une aire inférieure à la partie grisée donc 0,35 n'est pas la valeur arrondie à 10^{-2} près de $P(T \leqslant 1\,000)$.
   - On sait que si une variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
     Donc $P(T \leqslant 1\,000) = 1 - e^{-5{,}5\times10^{-4}\times1\,000} \approx 0{,}42$.

   Proposition 2 fausse

3. **Proposition 3 :** la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ par $f(x) = \cos(x)$ est $-\dfrac{2}{\pi}$.

   La fonction cosinus a pour primitive la fonction sinus donc la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ est : $\dfrac{1}{\pi - \frac{\pi}{2}} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\sin(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}\left(\sin\pi - \sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}\left(0 - 1\right) = -\dfrac{2}{\pi}$.

   Proposition 3 vraie

EXERCICE 4 — 7 points

Dans une municipalité, la collecte des déchets des particuliers s'effectue, depuis 2012, à l'aide de camions équipés de capteurs. Une tarification « incitative » permet aux habitations de diminuer leur facture en réduisant la masse de leurs ordures ménagères résiduelles par un choix de produits comportant moins d'emballages, une réduction du gaspillage alimentaire et un meilleur tri.
Le document 1 présente la masse moyenne de déchets, en kilogrammes, collectés par année depuis 2012 et par habitation de la ville.
Le document 2 présente les tarifs pratiqués en 2015 par la ville pour la collecte des ordures ménagères résiduelles (on suppose que ces tarifs resteront identiques les années suivantes).

DOCUMENT 1

Années 2012 à 2015

Année	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Déchets recyclables	261	275	289	305
Ordures ménagères résiduelles	274	269	262	256
Total	535	544	551	561

DOCUMENT 2

Année 2015

Tranches tarifaires	**Tranche 1**	**Tranche 2**	**Tranche 3**
Masse M en kilogrammes	$0 \leqslant M < 100$	$100 \leqslant M < 300$	$300 \leqslant M$
Forfait	200 €	300 €	420 €

PARTIE A

1. Depuis 2012, la masse moyenne de déchets collectés par habitant est en augmentation régulière; cela est dû exclusivement à l'augmentation de la masse des déchets recyclables, tandis que la masse des ordures ménagères est en diminution.
2. Une famille a jeté 320 kg d'ordures ménagères résiduelles en 2015 et elle diminue la masse de ses ordures ménagères résiduelles (OM) de 1 % par an.

   Avec 320 kg d'OM, cette famille est dans la tranche 3; elle passera dans la tranche 2 quand elle produira moins de 300 kg d'OM.

   Le tableau suivant donne la masse de ses OM (arrondie au kg) en tenant compte de cette diminution :

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
OM en kg	320	317	314	310	307	304	301	298

   Cette famille changera de tranche en 2022.

PARTIE B

En 2015, la municipalité comptait 10 000 habitations.
Dans le cadre de l'aménagement d'un nouveau quartier un constructeur garantit la livraison de 300 nouvelles habitations chaque année au 1^er^ janvier, de 2016 à 2024. En raison de la demande, ces logements seront immédiatement occupés dès le 1^er^ janvier.
La municipalité a souscrit avec un centre d'incinération un contrat de 9 ans qui a pris effet au 1^er^ janvier 2016. Le contrat prévoit de fortes pénalités financières dès que la masse annuelle d'ordures

ménagères résiduelles à incinérer vient à dépasser 2 800 tonnes. L'objectif de la municipalité est d'éviter ces pénalités.

1. Chaque année, il y a 300 habitations de plus donc $256 \times 300 = 76\,800$ kg d'OM en plus, soit 76,8 tonnes.

   Le tableau suivant donne le nombre d'habitations et la masse des OM en tonnes à partir de 2015 :

Année	Rang	Nb habitations	Masse OM
2015	0	10 000	2 560
2016	1	10 300	2 636,80
2017	2	10 600	2 713,60
2018	3	10 900	2 790,40
2019	4	11 200	2 867,20
2020	5	11 500	2 944,00
2021	6	11 800	3 020,80
2022	7	12 100	3 097,60
2023	8	12 400	3 174,40
2024	9	12 700	3 251,20

   Donc, à partir de l'année 2019, la masse des OM dépassera 2 800 tonnes.

2. Afin d'atteindre cet objectif, il convient donc de diminuer la masse moyenne d'ordures ménagères résiduelles à incinérer. La municipalité souhaite déterminer le pourcentage annuel minimal de réduction de la masse moyenne d'ordures ménagères résiduelles par habitation, pendant toute la durée du contrat.

   On admet que l'algorithme ci-dessous détermine ce pourcentage.

Variables	N : un nombre entier
	m : un nombre réel
	q : un nombre réel
Initialisation	q prend la valeur 1
	N prend la valeur 12 700
	m prend la valeur 0,246
Traitement	Tant que $N \times m \geqslant 2\,800$
	q prend la valeur $q - 0,001$
	m prend la valeur $0,256 \times q^9$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher $(1 - q) \times 100$

   Cet algorithme affiche 1,7.

   a. Pour que la masse des OM soit inférieure à 2 800 tonnes sur toute la période du contrat, il faut qu'elle soit inférieure à 2 800 tonnes lors de l'année pour laquelle il y a le plus d'habitations ; comme le nombre d'habitations augmente chaque année, c'est en 2024 qu'il y aura le plus d'habitations.

   Le nombre d'habitations en 2024 est de $10\,000 + 9 \times 300 = 12\,700$.

   b. Pour diminuer de p % de la masse des OM, on multiplie par $q = 1 - p$; on part de 256 kg, soit 0,256 tonne en 2015 et on multiplie chaque année par q. Donc en 2024, au rang 9, on multiplie la masse de départ m par q^9 ce qui donne $m \times q^9$ comme masse d'OM.

3. On considère que la masse annuelle moyenne d'ordures ménagères résiduelles par habitation va baisser chaque année de 1,7 %, à partir du 1^er^ janvier 2016 sur une période de 9 ans.

   On note u_n cette masse, exprimée en tonnes, pour l'année $2015 + n$ où n est un entier naturel. On a donc $u_0 = 0,256$.

a. Diminuer de 1,7 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{1,7}{100} = 0,983$.
$u_1 = u_0 \times 0,983 \approx 0,252$; $u_2 = u_1 \times 0,983 \approx 0,247$; $u_3 = u_2 \times 0,983 \approx 0,243$
Le rang 3 correspond à l'année $2015 + 3 = 2018$ donc selon ce modèle, en 2018 la masse moyenne d'OM par habitation sera de 0,243 tonne.

b. On passe de u_n à u_{n+1} en multipliant par 0,093, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $r = 0,983$ et de premier terme $u_0 = 0,256$.

c. On peut donc dire que $u_n = u_0 \times r^n = 0,256 \times 0,983^n$.

d. L'année 2014 correspond au rang $n = 9$: $u_9 = 0,256 \times 0,983^9 \approx 0,21939$.
En 2024 il y aura 12 700 habitations donc la masse totale d'OM en 2024 sera : $12700 \times 0,21939 \approx 2786$ tonnes.
On reste donc dans l'objectif fixé par la municipalité, en dessous des 2 800 tonnes par an.

PARTIE C

Des contrôles sont effectués afin de vérifier le tri des déchets.
Protocole d'étude
On choisit au hasard 100 habitations. Des personnels ont ouvert les poubelles de déchets recyclables de ces habitations afin de déterminer s'ils étaient conformes (absence de matériaux non recyclables, de cartons souillés ...).

Résultats de l'étude
Parmi ces 100 poubelles de déchets recyclables, 7 ont été jugées non conformes.

1. Un intervalle de confiance d'une proportion p au niveau de confiance de 95 %, est donné par :

$$I = \left[f - 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$$

où f est la fréquence observée dans l'échantillon de taille n.
Ici, $n = 100$ et $f = \dfrac{7}{100} = 0,07$.
L'intervalle de confiance est donc :
$I = \left[0,07 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{100}}\ ;\ 0,07 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,07 \times 0,93}{100}}\right] = \left[0,020\ ;\ 0,120\right]$
On a donc une estimation du nombre de poubelles non conformes entre 2 % et 12 %.

2. La proportion de poubelles de déchets recyclables qui ne sont pas conformes n'est pas nécessairement comprise dans l'intervalle $\left[0,020\ ;\ 0,120\right]$, mais on peut estimer que la probabilité que cet intervalle contienne la bonne proportion de poubelles non conforme est supérieure à 0,95.