CORRIGÉ. Session Antilles-Guyane, Septembre 2004.

Exercice 1.

Partie A - Nombre d'abonnés

1. Lorsque l'abonnement vaut 50 €, il y a $-50 \times 50 + 12\,500 = 10\,000$ abonnés.
2. L'image de 52 par f est $f(52) = -50 \times 52 + 12\,500 = 9\,900$.
   Ceci représente le nombre d'abonnés lorsque l'abonnement vaut 52 €.
3. Si l'ancien prix était p euro, il vaut, augmenté de 2 euro, $p + 2$ euro.
   $f(p+2) = -50\,(p+2) + 12\,500 = -50\,p - 100 + 12\,500 = (-50\,p + 12\,500) - 100 = f(p) - 100$.
   Donc toute augmentation de 2 € du prix de l'abonnement annuel fait diminuer de 100 le nombre d'abonnés à cette revue.
4. $f(p) = 5\,000 \Leftrightarrow -50\,p + 12\,500 = 5\,000 \Leftrightarrow -50\,p = 5\,000 - 12\,500 = -7\,500 \Leftrightarrow p = \dfrac{-7\,500}{-50} = 150.$
   S'il y a 5 000 abonnés, alors le prix de l'abonnement annuel est 150 €.
5. La fonction f est une fonction affine. Le coefficient de la variable p est -50, qui est négatif : la fonction est donc décroissante.
   Autrement dit, « plus un produit est cher, plus la demande diminue ».

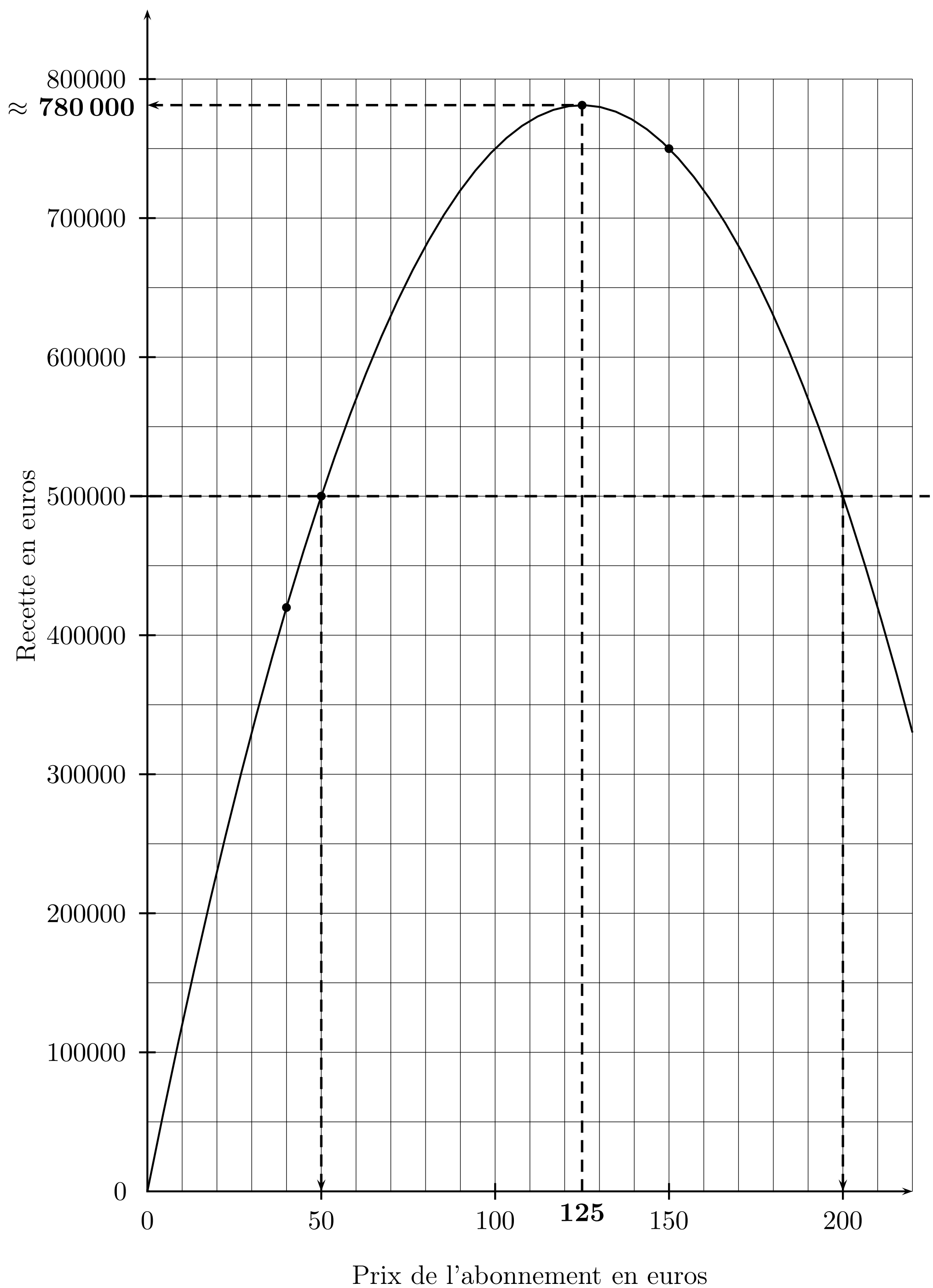
Partie B - Étude de la recette

1. Lorsque le prix de l'abonnement est égal à 50 €, il y a (d'après la question A. 1.) 10 000 abonnés.
   La recette correspondante est donc $50 \times 10\,000 = 500\,000$ €.
2. $f(40) = -50 \times 40 + 12\,500 = 10\,500$.
   La recette correspondante est donc $40 \times 10\,500 = 420\,000$ €.
3. Si le nombre d'abonnés est égal à 5 000, alors (d'après la question A. 4.), l'abonnement coûte 150 €. La recette correspondante est donc $150 \times 5\,000 = 750\,000$ €.
4. Le prix de l'abonnement étant égal à p euros, il y a $f(p)$ abonnés.
   La recette est donc égale, en euro, à $p \times f(p)$.
5. La recette est $p \times f(p) = p \times (-50\,p + 12\,500) = -50\,p^2 + 12\,500\,p = R(p)$.
6. (a) Le prix de l'abonnement qui rend la recette maximale est 125 €. *(Voir graphique.)*
   Le montant de la recette est alors environ 780 000 €.
   (La valeur exacte est $R(125) = 781\,250$ €.)

   (b) L'équation $R(p) = 500\,000$ admet les deux solutions et $p = 50$ et $p = 200$ (€).
   L'ensemble des solutions de l'inéquation $R(p) \geqslant 500\,000$ est l'intervalle $[50\,;\,200]$.
7. Le nombre d'abonnés qui correspond à la recette maximale est $f(125)$.
   $f(125) = -50 \times 125 + 12\,500 = 6\,250$.

Remarque. On vérifie la cohérence entre les réponses des questions B. 1., 2. et 3. d'une part et le graphique : les points de coordonnées respectives $(50\,;\,500\,000)$, $(40\,;\,420\,000)$ et $(150\,;\,750\,000)$ sont bien sur la courbe. *(Ils y ont été placés.)*

Recettes


800000
≈ 780 000
700000
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
Recette en euros
0
50
100
125
150
200
Prix de l'abonnement en euros

Exercice 2.

Partie A - Nombre de mots possibles de longueur donnée

1. Calcul de N

   (a) Il y a 36 caractères distincts : on peut donc former 36 mots d'une lettre.
   Pour les mots de deux lettres, il y a 36 choix pour la première lettre et 36 choix pour la seconde : il y a donc $36 \times 36 = 1\,296$ mots possibles.

   (b) Le premier terme de la suite est 36.
   La suite étant géométrique, sa raison est le quotient du second terme par le premier : $q = \dfrac{1\,296}{36} = 36$.

   (c) Cette suite traduit une croissance exponentielle.

   (d) D'après la question (b), et en appelant cette suite u, on peut écrire que l'on a :
   – pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n \times q = u_n \times 36$;
   – pour tout $n \geqslant 1, u_n = u_1 \times q^{n-1} = 36 \times 36^{n-1} = 36^n$.
   Par conséquent, une formule à saisir en cellule B3 est =36*B2 et une autre est =36^A3.

   (e) *(Voir le tableau ci-dessous.)*

   (f) La formule à saisir en cellule B7 est =SOMME(B2 : B6).
   On obtient $N = 62\,193\,780$.

2. Calcul de S

   (a) Il y a 36 mots d'une lettre donc 36 mots simples.
   Parmi les 1 296 mots de deux lettres, il y a 36 mots sont composés de deux lettres identiques (« aa », « bb », ...). Par conséquent, il y a $1\,296 - 36 = 1\,260$ mots simples.

   (b) Pour écrire un mot simple de longueur 2, on prend l'un des (36) mots simples de longueur 1, auquel on rajoute l'une des $36 - 1$ ($= 35$) lettres qu'il reste (les lettres ne pouvant pas se répéter).
   On peut donc saisir en cellule C3 la formule = C2*(36 − A2) .

   (c) *(Voir le tableau ci-dessous.)*

   (d) La formule à saisir en cellule C7 est =SOMME(C2 : C6).
   (On peut aussi recopier à droite la formule en cellule B6.)
   On obtient $S = 46\,696\,896$.

	A	B	C
1	Longueur du mot	Nombre de mots possibles	Nombre de mots simples possibles
2	1	36	36
3	2	1 296	1 260
4	3	46 656	42 840
5	4	1 679 616	1 413 720
6	5	60 466 176	45 239 040
7	Total	62 193 780	46 696 896

Partie B - Un texte de Charles Perrault est écrit en quatre langues.

Détaillons la méthode pour le texte en français.
On commence par calculer les effectifs cumulés :

Longueur ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre ...	6	32	9	7	14	19	4	6	4	1	1	1
Eff. cum.	6	38	47	54	68	87	91	97	101	102	103	104

0,5 $\times$ 104 = 52. La médiane est la plus petite valeur telle qu'au moins 52 valeurs de la série lui soient inférieures ou égales : Me = 4.

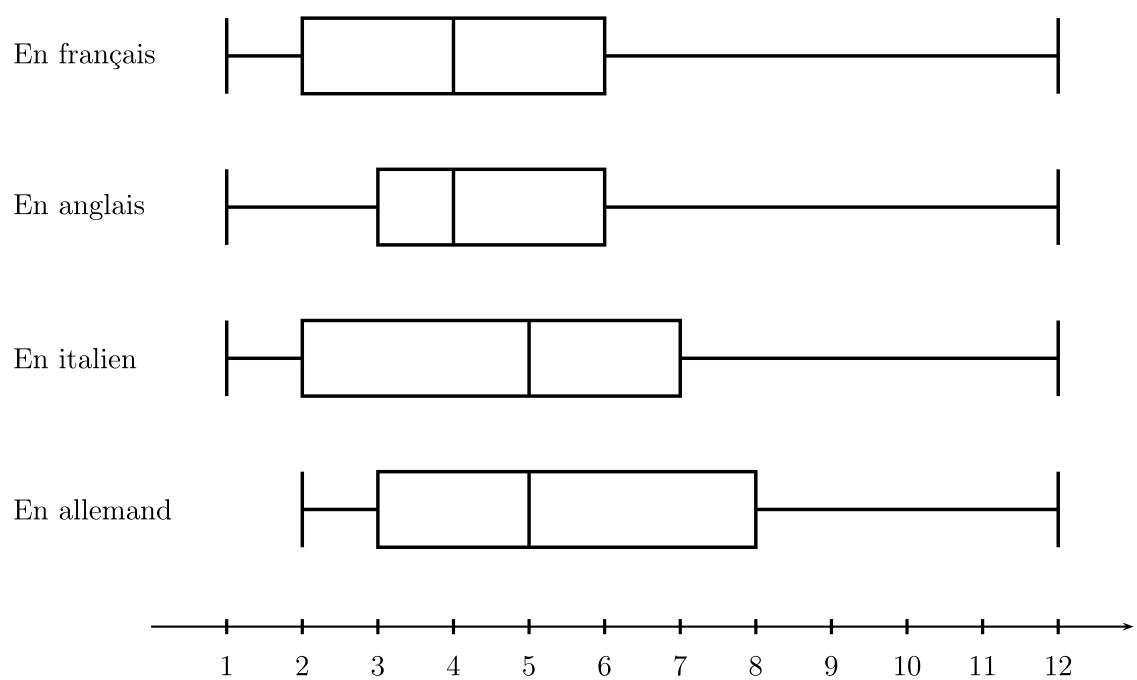
0,25 $\times$ 104 = 26. Le premier quartile est la plus petite valeur telle qu'au moins 26 valeurs de la série lui soient inférieures ou égales : $Q_1 = 2$.
0,75 $\times$ 104 = 78. Le troisième quartile est la plus petite valeur telle qu'au moins 78 valeurs de la série lui soient inférieures ou égales : $Q_3 = 6$.

0,1 $\times$ 104 = 10,4. Le premier décile est la plus petite valeur telle qu'au moins 11 valeurs de la série lui soient inférieures ou égales : $D_1 = 4$.
0,9 $\times$ 104 = 93,6. Le neuvième décile est la plus petite valeur telle qu'au moins 94 valeurs de la série lui soient inférieures ou égales : $D_9 = 8$.

En faisant de même avec les trois autres langues, on obtient le tableau suivant :

Langue	Min	D_1	Q_1	Me	Q_3	D_9	Max
Français	1	*2*	2	4	6	*8*	12
Anglais	1	*2*	3	4	6	*8*	12
Italien	1	*1*	2	5	7	*9*	12
Allemand	2	*3*	3	5	8	*9*	12

On construit les diagrammes en boîte des quatre séries statistiques :



(On aurait aussi pu construire les diagrammes en boîtes élaguées aux déciles.)