Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers juin 2007

Exercice 1

1. **Modélisation de l'expérience aléatoire** : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons (choix non ordonnés et sans répétition) de trois éléments distincts pris dans l'ensemble des huit boules $\{N1, N2, N3, R1, R2, R3, R4, R5\}$.
   On choisit la probabilité équirépartie sur cet univers Ω.
   On sait que $\text{Card}(\Omega) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8\times7\times6}{3!} = 56$.

   a. Cette probabilité est $\dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{56} = \frac{1}{56}$. Réponse **A**.

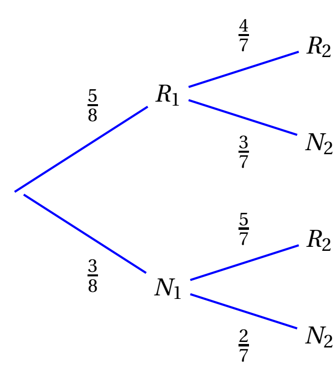
   b. La probabilité de tirer 3 boules rouges est $\dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{56} = \frac{10}{56}$. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est alors $\frac{1}{56} + \frac{10}{56} = \frac{11}{56}$. Réponse **A**.

2. On répète 5 fois, dans des conditions identiques et indépendantes, la même épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer une boule de l'urne. Les issues contraires de cette épreuve sont : « la boule tirée est noire » (succès de probabilité $p = 3/8$) et « la boule tirée est rouge » (échec de probabilité $q = 1 - p = 5/8$).
   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues au cours de ces 5 épreuves. On sait alors que $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(5, 3/8)}$
   Pour tout entier k compris entre 0 et 5, $P(X = k) = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{5-k}$.

   a. $P(X = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)^5$. Réponse **B**.

   b. $P(X = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{5}{8}\right)^3$. Réponse **C**.

3. Construisons l'arbre pondéré associé à cette troisième expérience aléatoire.



   a. $P_{R_1}(R_2)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant 7 boules : 4 rouges et 3 noires. Donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$. Réponse **B**.

   b. $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$. Réponse **C**.

   c. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20+15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$
   Réponse **A**.

   d. $P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{1 - P(R_2)} = \frac{15/56}{3/8} = \frac{5}{7}$. Réponse **C**.

Exercice 2 (enseignement obligatoire)

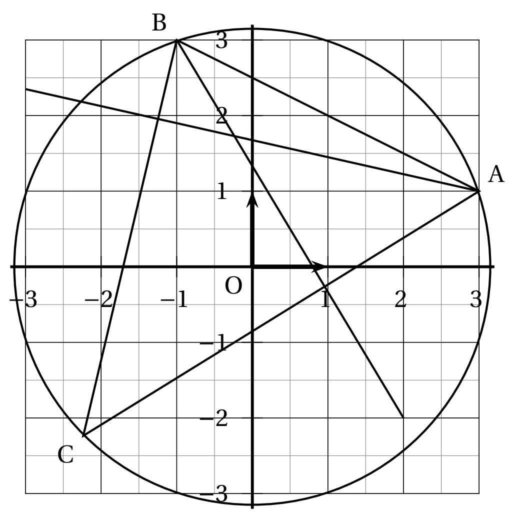
Partie 1

On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels. Alors $\mathrm{Ree}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$.

1. $\overline{z} = -z \iff x - \mathrm{i}y = -(x + \mathrm{i}y) \iff x - \mathrm{i}y = -x - \mathrm{i}y \iff 2x = 0 \iff x = 0$
$\iff \mathrm{Ree}(z) = 0 \iff z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ où $\mathrm{i}\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.
2. $\overline{z} = z \iff x - \mathrm{i}y = x + \mathrm{i}y \iff -2\mathrm{i}y = 0 \iff y = 0 \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.
3. Par définition, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ d'où $|z|^2 = x^2 + y^2$.
De plus, $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2$.
Par conséquent $z\overline{z} = |z|^2$.

Partie 2

1. $OA = |a| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$; $OB = |b| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;
$OC = |c| = \sqrt{5+5} = \sqrt{10}$.
Donc $OA = OB = OC$ ce qui signifie que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Le point H a pour affixe $h = (2 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5})i$.
Les points A et B se placent aisément. Le point C appartient au cercle de centre O, de rayon OA et à la droite d'équation réduite $y = x$.
Pour placer le point H, on utilise la calculatrice et on obtient
$h \approx -0,24 + i \times 1,76$.



On « voit » que H est l'orthocentre de ABC

Partie 3

1. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
ssi $OA = OB = OC$ ssi $OA^2 = OB^2 = OC^2$
ssi $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2$
ssi $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$ (d'après le résultat établi en I-3.)
2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$
   a. En utilisant les propriétés de la conjugaison (pour tous complexes z et z', $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et $\overline{\overline{z}} = z$), on obtient :
   $\overline{w} = \overline{\overline{b}c - b\overline{c}} = \overline{\overline{b}}\,\overline{c} - \overline{b}\,\overline{\overline{c}} = b\overline{c} - \overline{b}c = -(\overline{b}c - b\overline{c}) = -w$
   On en déduit que w est imaginaire pur.

b. • $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = b\overline{b} - b\overline{c} + c\overline{b} - c\overline{c} = \left(b\overline{b} - c\overline{c}\right) + \left(\overline{b}c - b\overline{c}\right)$.

Or $b\overline{b} = c\overline{c}$ d'après III-1. Donc $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = \overline{b}\,c - b\,\overline{c} = w$.

• $\frac{w}{|b-c|^2} = \frac{(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}{(b-c)\left(\overline{b-c}\right)} = \frac{(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)}{(b-c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)} = \frac{b+c}{b-c}$.

c. On sait que w est imaginaire pur et que $\frac{1}{|b-c|^2}$ est un nombre réel (strictement positif).

Il s'ensuit que $\frac{1}{|b-c|^2} \times w$ est un imaginaire pur c.à.d. que $\frac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur.

3. L'énoncé sous-entend que $b+c \neq 0$ (ou que ABC n'est pas rectangle en A).

a. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AH}} = h - a = b + c$

Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$

b. $\left(\overrightarrow{CB}\ ,\ \overrightarrow{AH}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{AH}\right) - \left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{CB}\right) = \arg(z_{\overrightarrow{AH}}) - \arg(z_{\overrightarrow{CB}})$

$= \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$

car $\frac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur **non nul**.

c. L'énoncé sous-entend de plus que $a+c \neq 0$ (ou que ABC n'est pas rectangle en B). D'après la question précédente, (CB) est perpendiculaire à (AH) et (CA) est perpendiculaire à (BH).

Le point H appartient donc à deux hauteurs du triangle ABC.

En conséquence $\boxed{H \text{ est l'orthocentre}}$ du triangle ABC.