

Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion 20 juin 2016

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

6 POINTS

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Utilisons un arbre pondéré :

Les hypothèses s'écrivent :

$$P(A) = 0,4 \quad P_A(\bar{S}) = 0,2 \quad P_B(\bar{S}) = 0,05.$$

On en déduit :

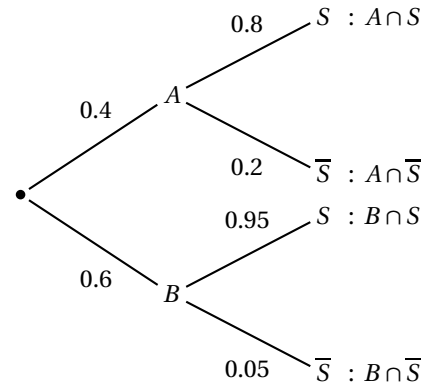
$$P(B) = 1 - P(A) = 0,6$$

$$P_A(S) = 1 - P_A(\bar{S}) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$P_B(S) = 1 - P_B(\bar{S}) = 1 - 0,05 = 0,95$$

On a ensuite :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = \mathbf{0,89}$$



2. Calculons $P_S(A)$:

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89}$$

Une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité cherchée est 0,36.

Partie B

1. Notons f la fréquence observée de composants sans défaut .

$$\text{On a } \begin{cases} f = 0,92 \geq 30 \\ n \times f = 400 \times 0,92 = 368 \geq 5 \\ n(1 - f) = 400 \times 0,08 = 32 \geq 5 \end{cases}$$

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance sont réunies.

Un intervalle de confiance de la proportion p , au niveau de confiance 0,95 est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}} \right] = \mathbf{[0,87; 0,97]}$$

2. Pour un échantillon de taille n , l'intervalle de confiance est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

dont l'amplitude est

$$\frac{2}{\sqrt{n}}$$

L'amplitude est au maximum égale à 0,02 si et seulement si $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02$ (1)

$$\begin{aligned}
 (1) &\iff 2 \leq 0,02\sqrt{n} \\
 &\iff \sqrt{n} \geq 100 \\
 &\iff n \geq 10000 \text{ car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon est 10000

Partie C

1. a. $P(T \leq a)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$

b. Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
 P(T \leq t) &= \int_0^t f(x) dx \\
 &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= [-e^{-\lambda x}]_0^t \\
 &= (-e^{-\lambda t}) - (-e^{-\lambda \times 0}) \\
 &= (-e^{-\lambda t}) - (-1) \\
 &= 1 - e^{-\lambda t}
 \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\text{c. De } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t \stackrel{\lambda > 0}{=} -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases} \text{ on déduit, par composition : } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0.$$

$$\text{On a ensuite, par somme : } \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - 0 = 1 :$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1$$

2. L'hypothèse s'écrit : $1 - e^{-7\lambda} = 0,5$ (1)

$$(1) \iff e^{-7\lambda} = 0,5$$

$$\iff -7\lambda = \ln \frac{1}{2}$$

$$\iff -7\lambda = -\ln 2$$

$$\iff \lambda = \frac{\ln 2}{7}$$

Une valeur approchée de λ , à 10^{-3} près, est 0,099

3. a. La question est de déterminer $P(T \geq 5)$.

Puisque $P(T \leq 5) = 1 - e^{-0,099 \times 5}$, alors

$$P(T \geq 5) = P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - (1 - e^{-0,099 \times 5}) = e^{-5 \times 0,099} = e^{-0,495}$$

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ 0,61

- b. Il s'agit de calculer

$$P_{(T \geq 2)}(T \geq 7)$$

La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$P_{(T \geq 2)}(T \geq 7) = P(T \geq 5)$$

La probabilité cherchée est environ 0,61

- c. $E(T) = \frac{1}{\lambda}$:

Une valeur approchée de l'espérance de T est environ 10,10 : la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

EXERCICE 2

4 POINTS

Commun à tous les candidats

Affirmation 1

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Puisque $\frac{-2}{2} \neq \frac{-2}{-2}$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés :

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2

Calculons $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur \vec{n} est normal au plan (ABC) :

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Première méthode :

- Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux. Calculons $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{EF} = 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$$

Puisque $\vec{n} \cdot \vec{EF} \neq 0$, alors

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants

• Puisque le milieu I du segment $[BC]$ appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :

Le milieu I du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2} \right) = (1, 0, 1)$$

Les vecteurs \vec{EF} et \vec{EI} ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Puisque $\vec{EI} = -2\vec{EF}$, les points E , I et F sont alignés :

$$I \in (EF)$$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment $[BC]$:

L'affirmation 3 est vraie.

Seconde méthode :

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par $E(-1, -2, 3)$ et est dirigée par $\vec{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de

la droite (EF) est alors

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

• Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté \mathcal{P} : Puisque $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan

\mathcal{P} , ce dernier a une équation de la forme

$$y - z + d = 0 \text{ où } d \in \mathbb{R}$$

Puisque $A(1, 2, 3)$ est un point de \mathcal{P} , alors $y_A - z_A + d = 0$, soit $d = -y_A + z_A = 1$

Une équation du plan \mathcal{P} est $y - z + 1 = 0$

• Déterminons $(EF) \cap \mathcal{P}$:

Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que

$$\begin{cases} x_M = -1 - t \\ y_M = -2 - t \\ z_M = 3 + t \end{cases}$$

M appartient à \mathcal{P} si et seulement si $y_M - z_M + 1 = 0$, i.e :

$$-2 - t - (3 + t) + 1 = 0$$

soit

$$t = -2$$

La droite (EF) et le plan \mathcal{P} sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1 - (-2), -2 - (-2), 3 + (-2)) = (1, 0, 1)$

Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :

Le milieu du segment [BC] a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2} \right) = (1, 0, 1)$$

On en déduit que I est le milieu de [BC]

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

Première méthode :

- Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ne sont pas colinéaires :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

- Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

— **Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :**

D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Puisque $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = -1 + 4 = 3 \neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

— **Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :**

Puisque les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ s'écrit en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , autrement dit si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

L'égalité ci-dessus est équivalente au système :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha - 2\beta \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires :

L'affirmation 4 est fausse.

Seconde méthode :

- Déterminons des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

La droite (AB) passe par A(1,2,3) et est dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

La droite (CD) passe par C(-1,0,1) et est dirigée par $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est donc :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Déterminons $(AB) \cap (CD)$: Résolvons pour cela le système $\begin{cases} 1 + 2t = -1 + 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 3 - 2t = t' \end{cases} \quad (1) :$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3t' = -2 \\ 2t + t' = 2 \\ 2t + t' = 3 \end{cases}$ Le système n'ayant pas de solution, on en déduit que les droites ne sont pas sécantes :

L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 3**5 POINTS****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) &= x \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &= e^0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution

2. • Montrons que f est strictement croissante sur \mathbb{R} :

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie, i.e \mathbb{R} .

Puisque $u > 0$ sur \mathbb{R} , alors la fonction $\ln \circ u = \ln u$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Finalement, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2 + 1)$, toutes deux dérivables sur \mathbb{R} . Pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est strictement positive sur \mathbb{R} , *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

• Montrons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$:

$$\text{De } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \quad \text{on déduit, par composition : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty.$$

Il vient ensuite, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$$

$$\text{De } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty \end{cases} \quad \text{on déduit, par somme :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0, 1]$. Par suite :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

$$\text{On a } \begin{cases} f(0) = 0 - \ln(0^2 + 1) = 0 \\ \text{et} \\ f(1) = 1 - \ln(1^2 + 1) = 1 - \ln 2 \end{cases} \quad . \text{ Puisque } 1 - \ln 2 < 1, \text{ alors}$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad 0 \leq f(x) < 1$$

On a prouvé :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \in [0, 1]$$

4. a. L'algorithme affiche la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2 + 1)$ est supérieur ou égal à N .

b. Pour $A = 100$, l'algorithme affiche 110

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , notons \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \in [0, 1]$.

• Puisque $u_0 = 1$, \mathcal{P}_0 est vraie.

• Supposons vraie la propriété \mathcal{P}_n pour un entier naturel n quelconque.

On a alors : $u_n \in [0 ; 1]$.

D'après la troisième question de la partie A, on en déduit :

$$f(u_n) \in [0 ; 1]$$

soit :

$$u_{n+1} \in [0 ; 1]$$

On a prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie} \implies \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

• On a prouvé par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0 ; 1]$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1).$$

Étudions le signe de $-\ln(u_n^2 + 1)$:

Puisque $0 \leq u_n \leq 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0, 1]$:

$$0^2 \leq u_n^2 \leq 1^2$$

soit :

$$u_n^2 \in [0 ; 1]$$

Par suite :

$$u_n^2 + 1 \in [1 ; 2]$$

La fonction \ln est croissante sur $[1 ; +\infty[$:

De $u_n^2 + 1 \geq 1$, on déduit $\ln(u_n^2 + 1) \geq \ln 1$, soit $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$.

Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$, alors

La suite u est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ .
4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution, on en déduit :

$$\ell = 0$$

EXERCICE 3

5 POINTS

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs. On a

$$15x - 12y = 3(5x - 4y)$$

$5x$ et $4y$ sont deux entiers. La différence de deux entiers étant un entier, $5x - 4y$ est un entier, et $3(5x - 4y)$ est ainsi un multiple de 3 :

Si x et y sont deux entiers relatifs, alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3

- b. Supposons qu'existe un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées (x_0, y_0) sont entières.

On a alors

$$y_0 = \frac{5}{4}x_0 - \frac{2}{3}$$

Soit :

$$15x_0 - 8 = 12y_0$$

Ou encore :

$$15x_0 - 12y_0 = 8$$

D'après la question précédente, $15x_0 - 12y_0$ est un multiple de 3.

Or $15x_0 - 12y_0$ est égal à 8. Comme 8 n'est pas un multiple de 3

Aucun point de la droite Δ_1 n'a ses coordonnées entières.

2. a. Puisque le point de coordonnées (x_0, y_0) appartient à Δ , on en déduit :

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

Soit :

$$nqy_0 = mx_0 - pn$$

Ou encore :

$$q(mx_0 - ny_0) = np$$

Puisque x_0, y_0, m et n sont des entiers, alors $mx_0 - ny_0$ est un entier :

$$q(mx_0 - ny_0) \text{ est donc un multiple de } q$$

Puisque $np = q(mx_0 - ny_0)$, alors

$$q \text{ divise } np$$

- b. D'après la question précédente, q divise np . Comme, par hypothèse, q et p sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauss, que q divise n .

$$q \text{ divise } n$$

3. a. Puisque n et m sont premiers entre eux, alors, en vertu du théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que

$$nu + mv' = 1$$

Puisque $n = qr$, l'égalité précédente s'écrit :

$$qru - m(-v') = 1$$

soit, en posant $v = -v'$:

$$qru - mv = 1$$

$$\text{Il existe deux entiers } u \text{ et } v \text{ tels que } qru - mv = 1$$

- b. L'égalité

$$y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$$

est équivalente, d'après la question 2.a, à l'égalité

$$q(mx_0 - ny_0) = np$$

soit :

$$q(mx_0 - ny_0) = qrp$$

Puisque $q \neq 0$, cette dernière égalité est équivalente à l'égalité :

$$mx_0 - ny_0 = rp \quad (1)$$

D'après la question précédente, on sait qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$nu - mv = 1$$

Multiplions chacun des deux membres de cette égalité par rp . On obtient alors :

$$nurp - mvrp = rp$$

soit :

$$m(-vrp) - n(-urp) = rp \quad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2), on en déduit :

Le point de coordonnées $(-vrp, -urp)$ est un point de Δ

4. Les questions 2 et 3 permettent d'énoncer le résultat suivant :

Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(n, m) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.
Alors il existe un point de Δ dont les coordonnées sont des entiers *si et seulement si* q divise n .

Dans le cas présent Δ est la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$.

Puisque $\begin{cases} \text{pgcd}(3, 8) = \text{pgcd}(7, 4) = 1 \\ \text{et} \\ 4 \text{ divise } 8 \end{cases}$, alors

Il existe un point de Δ dont les coordonnées sont des entiers

5. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{M}{N}x - \frac{P}{Q}$.

On applique le résultat énoncé au début de la question précédente :

- a. — Si Q ne divise pas N , alors l'algorithme affiche « pas de solution » : il se termine donc.
— Si Q divise N , on sait qu'il existe un point de Δ à coordonnées entières. Autrement dit, il existe un couple d'entiers (x_0, y_0) tel que

$$y_0 = \frac{M}{N}x_0 - \frac{P}{Q}$$

Il est clair qu'un tel couple existe si et seulement si il existe un entier *relatif* x_0 tel que $\frac{M}{N}x_0 - \frac{P}{Q}$ est un entier.

Lorsque X parcourt \mathbb{N} (i.e prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$), il existe donc un entier naturel X_0 tel que $\frac{M}{N}X_0 - \frac{P}{Q}$ ou $-\frac{M}{N}X_0 - \frac{P}{Q}$ est un entier *relatif* : l'algorithme se termine donc.

L'algorithme se termine

- b. **L'algorithme affiche les coordonnées du point de la droite d'équation $y = \frac{M}{N}x - \frac{P}{Q}$ dont l'abscisse a la plus petite valeur absolue.**

EXERCICE 4

5 POINTS

Commun à tous les candidats

1.

$$\tan \alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \quad \tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque la fonction cosinus ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit, par quotient, que la fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Puisque $\tan' > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, alors

La fonction tangente est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

3. On a $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$, soit $\gamma = \beta - \alpha$. Par suite :

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}} \\ &= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2 + 765}{x^2}} = \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} \\ &= \frac{5,6x}{x^2 + 765} \end{aligned}$$

$$\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

4. L'angle \widehat{ATB} est maximal lorsque sa mesure γ l'est. Puisque γ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ on en déduit, la fonction tangente étant strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, que γ est maximal si et seulement si $\tan \gamma$ est maximal.

S'il existe, le maximum de $\tan \gamma$ est ainsi le maximum, sur $]0, 50]$, de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}.$$

Remarque :

Pour démontrer que g admet, sur $]0, 50]$, un maximum atteint pour une unique valeur de x , il suffit d'étudier les variations de g , ce qui ne pose aucun problème...

On peut aussi procéder de la manière suivante :

Puisque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, 50]$, on peut définir, sur $]0, 50]$, la fonction $\frac{1}{g}$.

La fonction g est strictement positive sur $]0, 50]$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: les fonctions g et $\frac{1}{g}$ ont donc des sens de variation contraires.

Puisque $f = 5,6 \times \frac{1}{g}$, les fonctions f et $\frac{1}{g}$ ont les mêmes variations : les fonctions f et g ont donc des variations contraires.

Le maximum de g sur $]0, 50]$ est obtenu en une valeur de x pour laquelle f admet un minimum

1. Sous réserve d'existence

La fonction f est dérivable sur $]0, 50]$ et, pour tout nombre réel x appartenant à $]0, 50]$:

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{x + \sqrt{765}}{x} (x - \sqrt{765})$$

Puisque $x \in]0, 50]$, alors $x + \sqrt{765} > 0$:

le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - \sqrt{765}$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{765}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{765}, 50]$:

f admet donc, sur $]0, 50]$, un minimum atteint pour $x = \sqrt{765}$.

L'angle \widehat{ATB} est maximal pour une unique valeur de x , égale à $\sqrt{765}$ m

Une valeur approchée de x , au mètre près, est 28 m

Une valeur approchée de l'angle \widehat{ATB} , à 0,01 radian près est 0,1, soit environ 5,78°