EXERCICE 1 **5 points**

Commun a tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0{,}03x + 0{,}95$.

Solution : L'énoncé donne $P(A) = x \quad , \quad P_A(C) = 0{,}98 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(C) = 0{,}95$
A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A) + P\left(C \cap \overline{A}\right) \\ &= P_A(C) \times P(A) + P_{\overline{A}}(C) \times P\left(\overline{A}\right) \\ &= 0{,}98x + 0{,}95(1-x) = 0{,}03x + 0{,}95 \end{aligned}$$

2. A l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Solution : $P(C) = 0{,}96 \iff 0{,}03x + 0{,}95 = 0{,}96 \iff x = \dfrac{1}{3}$

Donc $P(A) = \dfrac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(B) = P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{2}{3}$

La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est donc bien égale au double de celle que la tablette provienne de la chaîne A

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

Solution : La durée de vie moyenne est de 5 ans on a donc $E(Z) = 5$ or $E(Z) = \dfrac{1}{\lambda}$ car Z suit la loi exponentielle de paramètre λ
Finalement $\lambda = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

2. Calculer $P(Z > 2)$.

Solution :
$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leqslant 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,dt = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^2 = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}4} + 1\right) = \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 0{,}670$

3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Solution : On cherche $P_{Z>3}(Z > 5)$
Or on sait que loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement,
On a donc $P_{Z>3}(Z > 5) = P_{Z>3}(Z > 3 + 2) = P(Z > 2) \approx 0{,}670$.

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 < X < 87)$.

Solution :
$P(83 < X < 87) = P\left(\mu - \sigma < X < \mu - \sigma\right) \approx 0{,}683$ d'après le cours

Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

Solution : D'après la question précédente, la probabilité que la teneur en cacao diffère de moins de 2% du pourcentage annoncé est d'environ 0,683 donc la probabilité cherchée est 1-0,683 = 0,317

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :

$$P(85 - a < X < 85 + a) = 0{,}9.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution : Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X - 85}{2}$ alors on sait que Y suit la loi normale centrée réduite
$85 - a < X < 85 + a \iff -a < X - 85 < a \iff -\dfrac{a}{2} < \dfrac{X - 85}{2} < \dfrac{a}{2} \iff -\dfrac{a}{2} < Y < \dfrac{a}{2}$
Donc $P(85 - a < X < 85 + a) = 0{,}9 \iff P\left(-\dfrac{a}{2} < Y < \dfrac{a}{2}\right) = 0{,}9$
Soit $P\left(Y < \dfrac{a}{2}\right) = 0{,}95$. D'après la calculatrice on trouve $\dfrac{a}{2} \approx 1{,}6449$ donc $a \approx 3{,}2898$ soit 3,290 au millième.
Cela signifie que l'on peut estimer à 90% la proportion de tablette ayant une teneur en cacao entre 81,71% et 88,29%

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81{,}7\,;\,88{,}3]$.
Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.
Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

Solution : Ici on répète $n = 550$ fois de manière indépendante le prélèvement d'une tablette dans le lot
La proportion annoncée est $p = 0{,}9$.
On a $n \geqslant 30$, $np = 495 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 55 \geqslant 5$.
On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique.
On peut affirmer avec une confiance à 95% que la fréquence de tablettes dont la teneur en cacao est comprise entre 81,7% et 88,3% appartient à l'intervalle $I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.
Or $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}87$ et $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}925 \approx 0{,}93$. Donc $I_n = [0{,}87\ ;\ 0{,}93]$ mais la fréquence observée est $f = \frac{470}{550} \approx 0{,}85$ et n'appartient donc pas à I_n.
On peut donc conclure que l'affirmation est mensongère au risque de 5% de se tromper.

Exercice 2 — 3 points

Commun a tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

Solution :
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4c < 0$ car $c > 9$ donc (E) admet deux solutions complexes non réelles

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{c-9}$ et $z_{\text{B}} = 3 - \text{i}\sqrt{c-9}$.

Solution : Les solutions de (E) sont conjuguées de la forme $z_1 = \frac{-b + \text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$

$z_1 = \frac{6 + \text{i}\sqrt{4c-36}}{2} = \frac{6 + 2\text{i}\sqrt{c-9}}{2} = 3 + \text{i}\sqrt{c-9} = z_{\text{A}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_{\text{A}}} = z_{\text{B}}$

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

Solution : $\text{OB} = |z_{\text{B}}| = \left|\overline{z_{\text{A}}}\right| = |z_{\text{A}}| = \text{OA}$
OAB est donc bien isocèle en O

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Solution : OAB est rectangle en O si et seulement si $AB^2 = 2OA^2$ car on sait qu'il est isocèle en O

$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = \left|2i\sqrt{c-9}\right|^2 = 4(c-9)$ et $2OA^2 = 2|z_A|^2 = 2 \times (9 + c - 9) = 2c$

$AB^2 = 2OA^2 \iff 4(c-9) = 2c \iff c = 18$

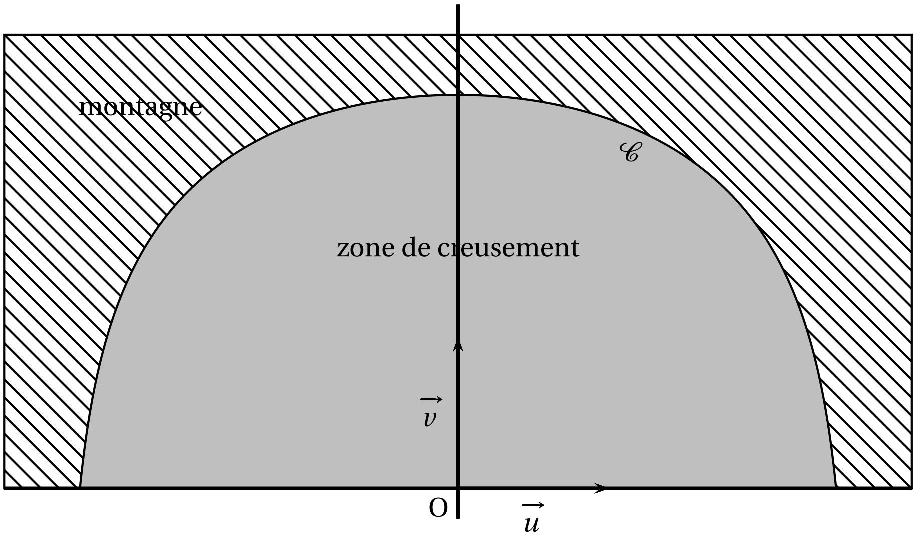
OAB est donc rectangle si et seulement si $c = 18$

Exercice 3 — 4 points

Commun a tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.

Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5 ; 2,5]$.

Solution : Sur $[-2,5 ; 2,5]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 6,25 \iff 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 12,5 \iff -12,5 \leqslant -2x^2 \leqslant 0 \iff$
$1 \leqslant -2x^2 + 13,5 \leqslant 13,5$.

$f = \ln(u)$ avec u dérivable et strictement positive sur $[-2,5 ; 2,5]$, f est donc dérivable sur $[-2,5 ; 2,5]$

$$f' = \frac{u'}{u} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -2x^2 + 13,5 \\ u'(x) = -4x \end{cases}$$

$$\forall x \in [-2,5 ; 2,5], f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$$

2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2{,}5\ ;\ 2{,}5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2{,}5\ ;\ 2{,}5]$.

Solution : sur $[-2{,}5\ ;\ 2{,}5]$, on a vu que $-2x^2+13{,}5>1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x$ soit $f'(x)>0$ sur $[-2{,}5\ ;\ 0[$ et $f'(x)<0$ sur $]0\ ;\ 2{,}5]$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-2{,}5$		0		$2{,}5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(13{,}5)$	$\searrow$	0

Conclusion : sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 2{,}5]$, $\quad f(x)\geqslant 0$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.

Solution :
D'après les deux points sur l'axe des abscisses, le diamètre d'un tel cercle serait de 5 donc son rayon de 2,5 or $f(0)=\ln(13{,}5)\neq 2{,}5$
$\mathscr{C}$ n'est donc pas un arc de cercle de centre O

2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est
$\mathscr{A}=8\displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution : La courbe $\mathscr{C}$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et au dessus de l'axe des abscisses, l'aire est donnée par $2\displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ en unité d'aire.
Or une unité d'aire est de 4 m^2 puisque l'unité du repère orthonormé est de 2 m.
Finalement l'aire de creusement est bien donnée par $\mathscr{A}=8\displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I=\displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a.
On admet que : $a\leqslant I\leqslant a+\dfrac{f(0)-f(2{,}5)}{n}\times 2{,}5$.

a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n=50$.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

Solution :

Initialisation	$S=0,\ n=50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	$0{,}05 f(0{,}05) = 0{,}130\,116$	$0{,}130\,116$
	2	$0{,}130\,060$	$0{,}260\,176$
	3	$0{,}129\,968$	$0{,}390\,144$
	4	$0{,}129\,837$	$0{,}519\,981$
	⋮		⋮
	24	$0{,}118\,137$	$3{,}025\,705$
	25	$0{,}116\,970$	$3{,}142\,675$
	⋮		⋮
	49	$0{,}020\,106$	$5{,}197\,538$
	50	$0{,}05\times f(2{,}5)=0$	$S+0=5{,}197\,538$
Affichage	S = $5{,}197\,538$		

b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Solution : L'algorithme donne une valeur approchée par défaut de I et il est admis que :
$a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0)-f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5$, donc on obtient :
$5{,}197\,538 \leqslant I \leqslant 5{,}197\,538 + \dfrac{\ln(13{,}5)}{50} \times 2{,}5$ ou
$5{,}197\,538 \leqslant I \leqslant 5{,}197\,538 + 0{,}130\,135$ et enfin $5{,}197\,538 \leqslant I \leqslant 5{,}327\,67$
Or $\mathscr{A} = 8I$, donc
$8 \times 5{,}197\,538 \leqslant 8 \times I \leqslant 8 \times 5{,}327\,67$ ou
$41{,}5803 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42{,}622$ donc $42-1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42+1$.
Donc l'aire de creusement a une valeur approchée de 42 m^2, au mètre carré près.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

Solution : en B3 : « $=2B2-A2+3$ »
en C3 : « $=2\wedge(A3)$ » ou « $=2\times C2$ »

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	l3	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Solution : La limite de (u_n) semble être $+\infty$
Celle de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ semble être 3

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$u_n = 3\times 2^n + n - 2$.

Solution : On procède par récurrence :
initialisation : $u_0 = 1$ et $3\times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0
hérédité : Soit n un naturel quelconque et supposons que : $u_n = 3\times 2^n + n - 2$
D'après la définition : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3 = 2\left(3\times 2^n + n - 2\right) - n + 3 = 3\times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 = 3\times 2^{n+1} + n - 1$ soit
$u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + n + 1 - 1 - 1 = 3\times 2^{n+1} + (n+1) - 2$.
La relation est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de la récurrence on a donc démontré que pour tout naturel n,
$u_n = 3\times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Solution : $u_{18} = 786448 < 1000000$ et $u_{19} = 1572881 > 1000000$.
19 est donc le rang du premier terme supérieur à un million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} = \left(3 + \dfrac{n-1}{2^{n+1}}\right) - \left(3 + \dfrac{n-2}{2^n}\right) = \dfrac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}} = \dfrac{-n+3}{2^{n+1}}$ est tu signe de $-n+3$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} < 0$ si $n > 3$ alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n} = 3 + \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

d'après l'encadrement donné, on en déduit que pour $n \geqslant 4$, $3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?

Solution : en B3 : « $= 2 * B2 + 3 * C2$ »
en C3 : « $= 2 * B2 + C2$ »

2. Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.

Solution : PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$ semble être de 1 (c'est le cas pour les 5 premiers termes)

3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».

Qu'en penser ?

Solution : $\dfrac{u_{10}}{v_{10}} \approx 1{,}499999404$, $\dfrac{u_{11}}{v_{11}} \approx 1{,}500000149$, $\dfrac{u_{12}}{v_{12}} \approx 1{,}499999963$, $\dfrac{u_{13}}{v_{13}} \approx 1{,}500000009$

il semblerait que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1,5

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.

Solution :
Initialisation : $2u_0 - 3v_0 = -1$ et $(-1)^{0+1} = -1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0
Hérédité : Supposons que pour un entier naturel p quelconque, $2u_p - 3v_p = (-1)^{p+1}$,
alors $2u_{p+1} - 3v_{p+1} = 2\left(2u_p + 3v_p\right) - 3\left(2u_p + v_p\right) = -2u_p + 3v_p = -\left(2u_p - 3v_p\right) = -(-1)^{p+1} = (-1)^{p+2}$.
Il y a donc hérédité à partir du rang 0.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang p elle est vraie au rang suivant $p+1$. D'après le principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n - 3v_n = (-1)^{p+1}$

2. Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$.

Solution :
D'après le théorème de Bezout, on peut déduire que PGCD$(u_n\ ;\ v_n) = 1$ car $2u_n - 3v_n = 1$ ou $-2u_n + 3v_n = 1$

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

Solution :
$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\times P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}=I_2$ et $P\times\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}P\times\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}=I_2$

On en déduit que P admet $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$ pour inverse.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n=Q_nP^{-1}X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases}u_n &= \dfrac{(-1)^n+3\times 2^{2n+1}}{5}\\ v_n &= \dfrac{(-1)^n+2^{2n+2}}{5}\end{cases}$

Solution :

$$\begin{aligned}Q_nP^{-1}&=Q_n\times\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}(-1)^n & 3\times 2^{2n}\\(-1)^{n+1} & 2^{2n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\times(-1)^n+3\times 2^{2n} & -3\times(-1)^n+3\times 2^{2n}\\2\times(-1)^{n+1}+2^{2n+1} & -3\times(-1)^{n+1}+2^{2n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

De plus $X_0=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } X_n&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\times(-1)^n+3\times 2^{2n}-3\times(-1)^n+3\times 2^{2n}\\2\times(-1)^{n+1}+2^{2n+1}-3\times(-1)^{n+1}+2^{2n+1}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}+3\times 2^{2n+1}\\(-1)^n+2^{2n+2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc bien pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases}u_n &= \dfrac{(-1)^n+3\times 2^{2n+1}}{5}\\ v_n &= \dfrac{(-1)^n+2^{2n+2}}{5}\end{cases}$

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}+3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}+2}$.

Solution :

Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{(-1)^{n+1}+3\times 2^{2n+1}}{(-1)^n+2^{2n+2}}=\dfrac{2^{2n+1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}+3\right)}{2^{2n+1}\left(\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}+2\right)}$

On a bien $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}+3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}+2}$

b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Solution : $-\dfrac{1}{2^{2n+1}}\leqslant\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\leqslant\dfrac{1}{2^{2n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{2n+1}}=0$

On a donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}=0$

On en déduit, par opération sur les limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{3}{2}$ qui confirme la conjecture émise

Exercice 5 — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}~;~\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

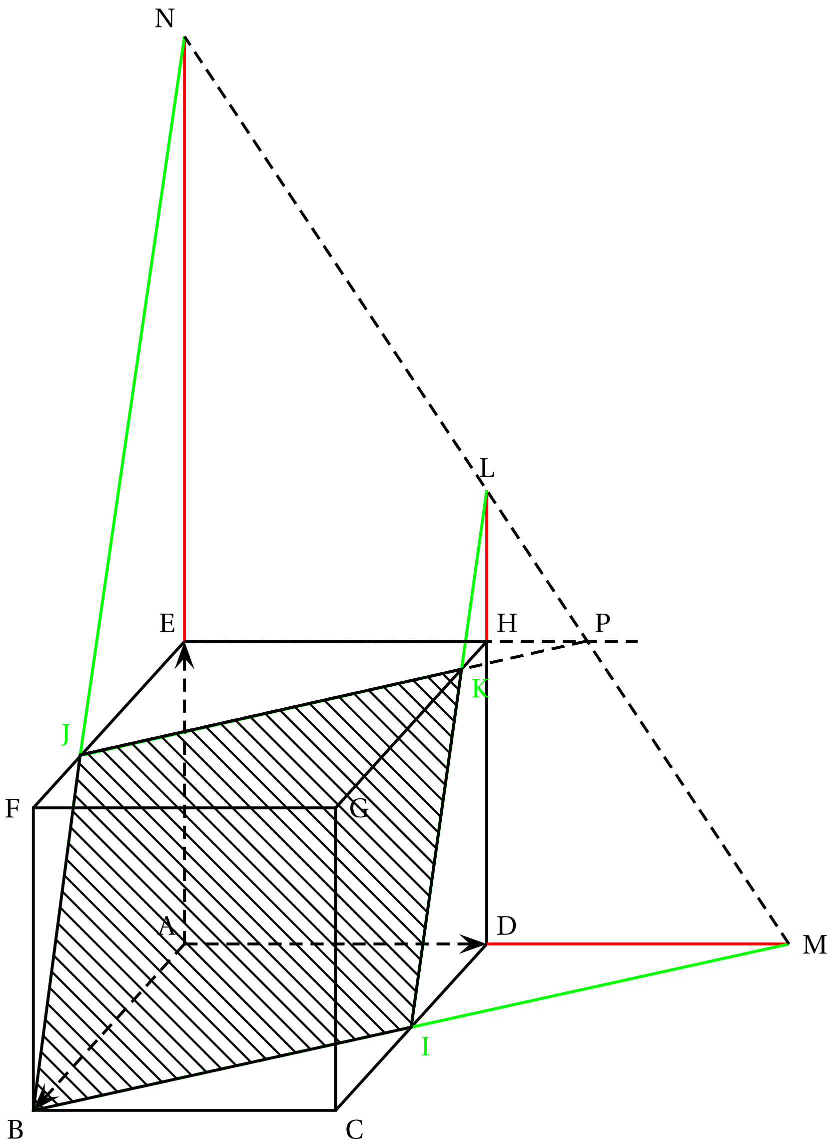
On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$.
Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

Solution : version 1
Le point B$(1~;~0~;~0) \in \mathscr{P}$
Le point M$(0~;~2~;~0) \in \mathscr{P}$. M est le symétrique de A par rapport à D.
Le point N$(0~;~0~;~3) \in \mathscr{P}$. N est défini par $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
(BM) $\subset$ (ABC), (BM) coupe [DC] en un point I.
(BN) $\subset$ (ABE), (BN) coupe [EF] en un point L.
Les plans (ABE) et (CDH) sont parallèles donc $\mathscr{P}$ les coupe suivant deux droites parallèles.
La parallèle à (BJ) passant par I coupe [GH] en K.
Rem. On peut finir à la règle seulement en traçant (MN) et (EH) sécantes en P. La droite (JP) coupe l'arête [GH] en K.
La section du cube par $\mathscr{P}$ est la surface limitée par le parallélogramme BIKJ.

Solution : version 2
On cherche des points communs au plan et au cube.
Avec le choix de l'origine du repère en A les équations des plans contenant les faces sont simples :
$x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.
Comme une équation du plan $\mathscr{P}$ est $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$, on cherche donc trois nombres de somme 1 ; et si l'un d'entre eux est égal à 1 , la somme des deux autres est nulle. Il y a déjà trois possibilités :

- $x=1$, d'où $\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=0 \iff 3y+2z=0$: le point B$(1;0;0)$ est l'un des points cherchés.
- $y=2$, donne $x+\frac{1}{3}z=0$; on obtient le point M$(0;2;0)$
- $z=3$, donne $x+\frac{1}{2}y=0$; on obtient le point N$(0;0;3)$
- $x=\frac{1}{2}$ et $y=1$ donnent $\frac{1}{3}z=0$; on obtient le point I$\left(\frac{1}{2}~;~1~;~0\right)$ (milieu de [CD])
- $x=0$ et $y=1$ donnent $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}z=1 \iff 2z=3 \iff z=\frac{3}{2}$; on obtient le point L$\left(0~;~1~;~\frac{3}{2}\right)$.

Les droites (IL) et (GH) sont coplanaires et sécantes en K.
Les droites (BN) et (EF) sont coplanaires et sécantes en J.
La section du cube par $\mathscr{P}$ est la surface limitée par le parallélogramme BIKJ.


N
L
E
H
P
K
J
F
G
A
D
M
I
B
C