∽ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord ∾ juin 2002

Exercice 1 (commun à tous les candidats)

Partie I

1. **a.** Loi de N :

n_i	$-p$	n
$P(N = n_i)$	$2/3$	$1/3$

b. $E(X) = 0 \iff -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{1}{3}n = 0 \iff \boxed{n = 2p}$

2. On a 4 épreuves répétées, indépendantes les unes des autres, chaque épreuve donne lieu à 2 éventualités :

– succès (il a bien répondu) de probabilité $p = \dfrac{1}{3}$.

– échec (mauvaise réponse) de probabilité $q = \dfrac{2}{3}$

On a donc un schéma de Bernoulli. Soit X la V. A. prenant pour valeur le nombre de succès dans la série de 4 épreuves.

On veut $P(X = 3) = C_4^3 \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \left(\dfrac{2}{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \left(\dfrac{2}{3}\right)$

$$\boxed{P(X = 3) = \dfrac{8}{81} \approx 9.9 \times 10^{-2}}$$

Partie II

a. $C_{10}^3 - C_5^3 = 110$: $\boxed{\text{Réponse 3}}$

b.

	A	$\overline{A}$	
B	**0, 25**	0,25	0,5
$\overline{B}$	0, 15	0,35	0,5
	0,4	0,6	1

: $\boxed{\text{Réponse 2}}$

c. $p(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p_A(B)} = \dfrac{1/6}{1/4} = \dfrac{2}{3}$: $\boxed{\text{Réponse 1}}$

d. $E(X) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{4} + 4 \times \dfrac{1}{4} = 2 : E(X) = 2$

$V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = 1^2 \times \dfrac{1}{2} + 2^2 \times \dfrac{1}{4} + 4^2 \times \dfrac{1}{4} - 4 = \dfrac{3}{2}$

$\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$: $\boxed{\text{Réponse 2}}$

Exercice 2 (non spécialistes)

1. $z_A = -2 + 2\text{i}$; $\quad z_{A'} = (1 + \text{i})z_A + 2 = -2$: $\boxed{z_{A'} = -2}$

$F(B) = A \iff (1 + \text{i})z_B + 2 = -2 + 2\text{i} \iff z_B = \dfrac{-4 + 2\text{i}}{1 + \text{i}} = -1 + 3\text{i}$: $\boxed{z_B = -1 + 3\text{i}}$

2. **a.** Résolvons l'équation $z = (1 + \text{i})z + 2 \qquad (1)$

$(1) \iff \text{i}z = -2 \iff z = \dfrac{-2}{\text{i}} = 2\text{i}$;

Il n'existe qu'un seul point invariant par F : le point $\boxed{\Omega(2\text{i})}$; $\omega = 2\text{i}$

b. Pour $z \neq \omega$, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = \dfrac{(1+\mathrm{i})\,z+2-z}{2\mathrm{i}-z} = \dfrac{\mathrm{i}z+2}{2\mathrm{i}-z} = \dfrac{-\mathrm{i}\,(-z+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i}$

$$\boxed{\dfrac{z'-z}{\omega-z} = -\mathrm{i}}$$

Donc $\dfrac{MM'}{M\Omega} = \dfrac{\left|z'-z\right|}{|\omega - z|} = |-\mathrm{i}| = 1$: $\boxed{MM' = M\Omega}$

$\left(\overrightarrow{M\Omega}\ ;\ \overrightarrow{MM'}\right) = \arg(-\mathrm{i})\ [\text{mod } 2\pi] = -\dfrac{\pi}{2}\ [\text{mod } 2\pi]$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{M\Omega}\ ;\ \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[\text{mod } 2\pi]}$$

M' est l'intersection de la demi-droite perpendiculaire à $(M\Omega)$ passant par M, car $\left(\overrightarrow{M\Omega}\ ;\ \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[\text{mod } 2\pi]$, et du cercle de centre M passant par Ω, car $MM' = M\Omega$.

3. **a.** $|z+2-2\mathrm{i}| = \sqrt{2} \iff AM = \sqrt{2}$:

$\boxed{\Gamma \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

On a $AB = |z_B - z_A| = |-1+3\mathrm{i}+2-2\mathrm{i}| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$: $\boxed{B \in \Gamma}$

b. On a $z'+2 = (1+\mathrm{i})\,z+4 = (1+\mathrm{i})\,z+4$

et $(1+\mathrm{i})\,(z+2-2\mathrm{i}) = z+2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}z+2\mathrm{i}+2 = z+4+\mathrm{i}z$.

Donc $\boxed{z'+2 = (1+\mathrm{i})\,(z+2-2\mathrm{i})}$

Soit $M \in \Gamma$, alors :

$AM = \sqrt{2} \Rightarrow |z+2-2\mathrm{i}| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \left|z'+2\right| = |1+i|\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left|z'+2\right| = 2 \Rightarrow A'M' = 2.$

Donc l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ' de centre A' et de rayon 2.

Exercice 2 (spécialistes)

Partie A

1. **a.** $\boxed{1001 = 7 \times 11 \times 13}$

b. On a :

$\overline{abba} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a = 1\,001a + 110b = 11\,(7 \times 13a + 10b)$

$\boxed{\text{Tout élément de } (E) \text{ est divisible par 11.}}$

2. **a.** $a \geqslant 2$: on a 8 choix possibles pour a, puis 10 choix possibles pour b.

D'après le principe multiplicatif (choix successifs), on aura $8 \times 10 \times 1 \times 1 = 80$ choix possibles pour a et b.

$\boxed{\text{Le nombre d'éléments de } (E) \text{ est 80.}}$

b. $\overline{abba}$ n'est divisible ni par 2, ni par 5, si $a \in \{3, 7, 9\}$.

On a $3 \times 10 =$ $\boxed{\text{30 éléments de } (E) \text{ qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5.}}$

3. **a.** $n = \overline{abba}$ est divisible par 3 si et seulement si $a+b+b+a = 2\,(a+b)$ est divisible par 3.

Donc 3 divise $2\,(a+b)$, et comme 3 est premier avec 2, 3 divise $(a+b)$, d'après le théorème de Gauss.

Réciproquement, si 3 divise $(a+b)$, 3 divise $2\,(a+b) = a+b+b+a$ et donc 3 divise n.

Donc « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».

b. n est divisible par 7 ssi $11\,(7 \times 13a + 10b) = 7q, q \in \mathbb{N}$.
Comme 7 est premier avec 11, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $7 \times 13a + 10b$.
Donc $7 \times 13a + 10b = 7q'$, donc $10b = 7\left(q' - 13a\right)$.
7 divise $10b$ et est premier avec 10 : donc 7 divise b.
Réciproquement, si 7 divise $b, b = 7k$ et $n = 11\,(7 \times 13a + 10 \times 7k) = 11 \times 7\,(13a + 10k)$ est divisible par 7.
Donc « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».
4. n ne doit être divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7.
Donc $a \in \{3\ ;\ 7\ ;\ 9\}$, $a + b$ non multiple de 3 et $b \neq 7$.
On obtient :

$3113 = 11 \times 283$	$7117 = 11 \times 647$	$9119 = 11 \times 829$
$3223 = 11 \times 293$	$7337 = 11 \times 23 \times 29$	$9229 = 11 \times 839$
$3443 = 11 \times 313$	$7447 = 11 \times 677$	$9449 = 11 \times 859$
$3553 = 11 \times 17 \times 19$	$7667 = 11 \times 17 \times 41$	$9559 = 11^2 \times 79$
$3883 = 11 \times 353$	$7997 = 11 \times 727$	$9889 = 11 \times 29 \times 31$

Partie B

1. On a $4 \times 6 - 11 \times 2 = 2$: le couple $(6, 2)$ est solution de (e).
$(e) \iff 4p - 11q = 4 \times 6 - 11 \times 2 \iff 4\left(p - 6\right) = 11\left(q - 2\right)$
11 divise $4\left(p - 6\right)$ et est premier avec 4, donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise $\left(p - 6\right)$.
Donc $p - 6 = 11k \iff p = 6 + 11k; k \in \mathbb{Z}$.
Donc $11\left(q - 2\right) = 4 \times 11k \Rightarrow q = 2 + 4k$.
Réciproquement, si $\left(p, q\right) = (6 + 11k, 2 + 4k)$, $4p - 11q = 4\,(6 + 11k) - 11\,(2 + 4k) = 2$.
Donc l'ensemble des solutions de (e) est $\boxed{S_{(e)} = \{(6 + 11k, 2 + 4k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}}$
2. On a $n = 2000 + 4p = 2002 + 11q$, donc $4p - 11q = 2$.
D'où $p = 6 + 11k$; $k \in \mathbb{Z}$, et $2000 + 4\,(6 + 11k) = \boxed{2024 + 44k = n; k \in \mathbb{Z}}$
3. On obtient :
2112
2332
2552
2772
2992
4004

Problème :

$$f_k\,(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + kx\right) - x; \quad x \geqslant 0.$$

Étude préliminaire : $g(x) = \ln(1 + x) - x$; $x \geq 0$

1. La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 1 = -\dfrac{x}{1 + x} \leqslant 0$.
La fonction g est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 $\searrow$	

: pour tout $a \geqslant 0$, $g(a) \leqslant 0$ ou $\boxed{\ln(1 + a) \leqslant a}$

Partie A

1. La fonction f_1' est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et :
$f_1'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x} - 1 = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x + x}$ du signe de $1-x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est donc croissante sur } [0\ ;\ 1] \text{ et décroissante sur } [1\ ;\ +\infty[.}$

2. Pour tout $x \geq 0$,
$f_1(x) = \ln\left[\mathrm{e}^x\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)\right] - x = \ln \mathrm{e}^x + \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) - x = x + \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) - x$
$\boxed{f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$: $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}$

3.

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(\mathrm{e}+1) - 1$	$\searrow$	0

Partie B

1. La fonction f_k est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et :
$f_k'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + k}{\mathrm{e}^x + kx} - 1 = k\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x + kx}$ du signe de $1-x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ car $k > 0$.
$\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ est donc croissante sur } [0\ ;\ 1] \text{ et décroissante sur } [1\ ;\ +\infty[.}$

2. Même calcul que pour f_1 : $\boxed{f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}$ et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0}$

3. **a.**

x	0		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+k) - 1$	$\searrow$	0

Pour $x \geq 0$, soit $d_k(x) = f_k(x) - \dfrac{k}{e}$

$d_k'(x) = f_k'(x)$: d_k varie comme f_k.

x	0		1		$+\infty$
$d_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$d_k(x)$	$-\dfrac{k}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$d_k(1)$	$\searrow$	$-\dfrac{k}{\mathrm{e}}$

On a $d_k(1) = \ln(e+k) - 1 - \dfrac{k}{e} = \ln e + \ln\left(1 + \dfrac{k}{\mathrm{e}}\right) - 1 - \dfrac{k}{e} = \ln\left(1 + \dfrac{k}{\mathrm{e}}\right) - \dfrac{k}{\mathrm{e}}$

Comme, $\ln(1+a) \leqslant a$ pour tout $a \geqslant 0$, on aura $\ln\left(1 + \dfrac{k}{\mathrm{e}}\right) - \dfrac{k}{\mathrm{e}} \leqslant 0$.

Donc, pour tout $x \geq 0$, $d_k(x) \leqslant 0$: $\boxed{f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}}$

4. T_k a pour équation : $y - f_k(0) = f_k'(0)(x-0)$ ou $\boxed{y = kx}$

5. $p < m$,

$$f_m(x) - f_p(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + mx\right) - \ln\left(\mathrm{e}^x + px\right) = \ln\frac{\mathrm{e}^x + mx}{\mathrm{e}^x + px}$$

On a

$$f_m(x) - f_p(x) \geqslant 0 \iff \frac{e^x + mx}{\mathrm{e}^x + px} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x + mx \geqslant \mathrm{e}^x + px$$
$$\iff \left(m - p\right)x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0.$$

Donc, pour $m > p$, $\boxed{C_m \text{ est au-dessus de } C_p}$

6.

Partie C

1. Comme la fonction f_k est intégrable et positive sur $[0\ ;\ \lambda]$, $(0 < \lambda)$:

$A(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda f_k(x)\,\mathrm{d}x.$

Pour $x \in [0\ ;\ \lambda]$, $k > 0$, $k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \geqslant 0 : \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \leqslant k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$, donc $f_k(x) \leqslant kx\mathrm{e}^{-x}$.

Les fonctions f_k et $\left(x \mapsto kx\mathrm{e}^{-x}\right)$ sont intégrables sur $[0\ ;\ \lambda]$ avec $0 < \lambda$, donc :

$\displaystyle\int_0^\lambda f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\lambda kx\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ soit $\boxed{A(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}$

2. Posons $\left\{\begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) = 1 & u(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

Les fonctions u, u', v, v' sont dérivables sur $[0\ ;\ \lambda]$: on peut intégrer $\displaystyle\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ par parties.

$\displaystyle\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\lambda = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1.$

$\boxed{\displaystyle\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}.}$

3. Comme on a $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda = 0$, et que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} = 0$

$\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1.$

Donc $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} k\int_0^\lambda xe^{-x}\mathrm{d}x = k$ et par suite $\boxed{\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) \leqslant k.}$

Problème ; partie B : question 6