

Exercice 1

5 points

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$,

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire u définie par $u(x) = -\frac{1}{4}x$ est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle $u'(x) = -\frac{1}{4}$.

La fonction composée $g(u(x)) = axe^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle, $g'(u) = ae^{u(x)} + axu' \times e^{u(x)} = ae^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4}\right)$.

Or $g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4}\right) + \frac{1}{4} \times axe^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4} + \frac{ax}{4}\right) = ae^{-\frac{1}{4}x}$.

Donc g est solution de l'équation différentielle sur $[0; +\infty[$, si sur cet intervalle :

$$ae^{-\frac{1}{4}x} = 20e^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20, \text{ car quel que soit } x \text{ réel, } e^{-\frac{1}{4}x} \neq 0.$$

La fonction $g : x \mapsto 20xe^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{4}y = 0$,

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

L'équation (E') peut s'écrire $y' = -\frac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation (E') sont les fonctions f définies par :

$$f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions f de l'équation (E) sont telles que pour $x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \text{ ou d'après la question 1. :}$$

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = g'(x) + \frac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \frac{1}{4}[f(x) - g(x)] \text{ soit par linéarité de la dérivation :}$$

$(f - g)'(x) + \frac{1}{4}[f - g](x) = 0$: ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de (E') c'est-à-dire que

$$f(x) - g(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} + g(x) \text{ ou enfin } f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} + 20xe^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = (20x + K)e^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont donc les fonctions f définies par :
 $f(x) = e^{-\frac{1}{4}x}(20x + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

4. On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K)e^0 = 8 \iff K = 8$, donc :

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x + 2)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$.

1. a. La fonction f est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation (E), soit

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \text{ donc}$$

$$f'(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4} \times 4(5x + 2)e^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x}(20 - 5x - 2) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

b. Comme quel que soit x , $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $18 - 5x$:

• $18 - 5x > 0 \iff \frac{18}{5} > x$: sur l'intervalle $\left[0; \frac{18}{5}\right]$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante;

• $18 - 5x < 0 \iff \frac{18}{5} < x$: sur l'intervalle $\left[\frac{18}{5}; +\infty\right]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante;

$f'\left(\frac{18}{5}\right) = 0$, donc $f\left(\frac{18}{5}\right)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$\text{On a } f\left(\frac{18}{5}\right) = (72 + 8)e^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = 80e^{-\frac{9}{10}} \approx 32,53.$$

On a vu à la partie A que $f(0) = 8$, et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

D'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{18}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	8	$80e^{-\frac{9}{10}}$	0

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

a. On a $f(14) = 288e^{-3,5} \approx 8,7$ et $f(15) = 300e^{-3,75} \approx 7,2$.

Sur l'intervalle $[14; 15]$, la fonction f est continue car dérivable sur $[0; +\infty[$, donc sur $[14; 15]$ et elle est strictement décroissante; comme $8 \in [f(15); f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α telle que $f(\alpha) = 8$.

b. On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` écrite en langage Python

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

- c. L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x) = 8$ dans l'intervalle $[14 ; 15]$.

Exercice 2

6 points

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

On note :

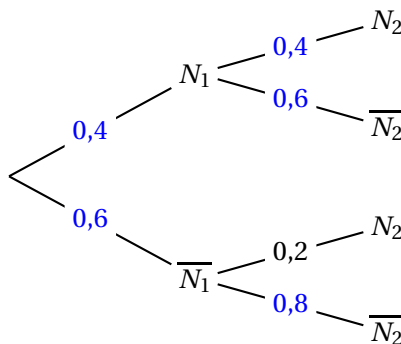
- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A , on note \bar{A} son évènement contraire.

PARTIE A

1. a. Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2 , il y a dans l'urne U_2 1 boule noire et 4 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{\bar{N}_1}(N_2) = \frac{1}{5} = 0,2$.
- b. Dans U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches donc la probabilité de piocher une boule noire est $P(N_1) = \frac{4}{10} = 0,4$.

Si on a pioché une boule noire dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2 , il y a dans l'urne U_2 2 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{5} = 0,4$.



2. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

3. On cherche la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N_1} \cap N_2) = 0,16 + 0,6 \times 0,2 = 0,28.$$

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2 .

La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

$$P_{N_2}(\overline{N_1}) = \frac{P(N_2 \cap \overline{N_1})}{P(N_2)} = \frac{0,12}{0,28} = \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. D'après le texte, on est dans le cas de n répétitions, de façon identique et indépendante, d'une expérience qui n'a que deux issues.

Donc la variable X qui donne le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 , suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,28$.

2. On résout l'inéquation $1 - 0,72^n \geq 0,9$.

$$\begin{aligned} 1 - 0,72^n \geq 0,9 &\iff 1 - 0,9 \geq 0,72^n \iff 0,1 \geq 0,72^n \\ &\iff \ln(0,1) \geq \ln(0,72^n) \quad (\text{fonction } \ln \text{ croissante sur } [0; +\infty[) \\ &\iff \ln(0,1) \geq n \ln(0,72) \\ &\iff \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \leq n \quad (\ln(0,72) < 0) \end{aligned}$$

$$\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \approx 7,01 \text{ donc le plus petit entier naturel } n \text{ tel que : } 1 - 0,72^n \geq 0,9 \text{ est } 8.$$

3. 0,72 est la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 .

$0,72^n$ est la probabilité de piocher n boules blanches dans l'urne U_2 lors des n tirages.

$1 - 0,72^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité de piocher au moins une boule noire lors des n tirages.

Il faut donc au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à 0,9.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

1. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément; il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ tirages possibles.

2. Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.

3. On examine les différents cas.

- On a pioché 2 boules noires dans U_1 (événement noté NN).

$$\triangleright P(NN) = \frac{\binom{4}{2}}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

- ▷ On a mis les 2 boules noires piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

$$\text{La probabilité de piocher une boule noire dans } U_2 \text{ est alors } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 (événement noté NB).

$$\triangleright P(NB) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

- ▷ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

$$\text{La probabilité de piocher une boule noire dans } U_2 \text{ est alors } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

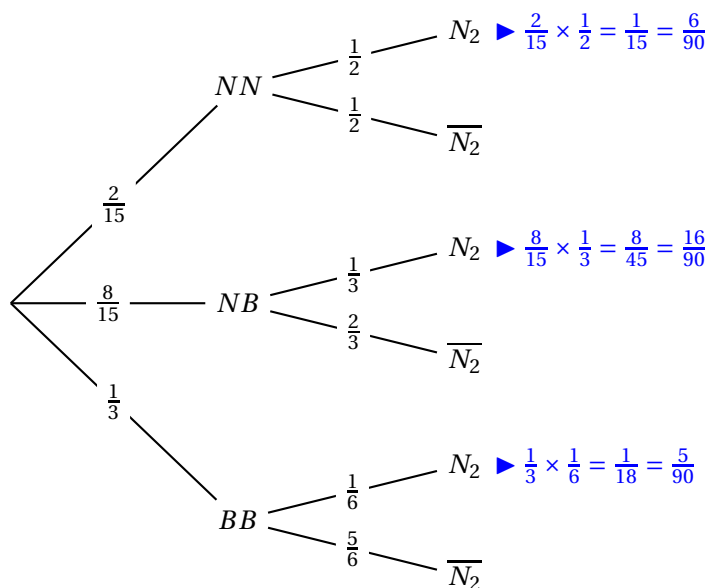
- On a pioché 2 boules blanches dans U_1 (événement noté BB).

$$\triangleright P(BB) = \frac{\binom{6}{2}}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

- ▷ On a mis les 2 boules blanches piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

$$\text{La probabilité de piocher une boule noire dans } U_2 \text{ est alors } \frac{1}{6}.$$

On résume la situation dans un arbre pondéré.



La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = P(NN \cap N_2) + P(NB \cap N_2) + P(BB \cap N_2) = \frac{6}{90} + \frac{16}{90} + \frac{5}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est égale à 0,3; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A qui était de 0,28.

Exercice 3

4 points

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

Pour tout n non nul, on a : $-1 \leq (-1)^n \leq +1$ donc $25 - 1 \leq 25 + (-1)^n \leq 25 + 1$ donc $24 \leq 25 + (-1)^n \leq 26$ donc $\frac{24}{n} \leq \frac{25 + (-1)^n}{n} \leq \frac{26}{n}$ donc $\frac{24}{n} \leq u_n \leq \frac{26}{n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{24}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $w_n > 0$ et on considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout n , on a : $t_{n+1} = \frac{k}{w_{n+1}} = \frac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \frac{k(1+w_n)}{w_n} = \frac{k + kw_n}{w_n} = \frac{k}{w_n} + k = t_n + k$

Donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k .

De plus, $k > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n , $v_n > 0$,

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

Soit \mathcal{P}_n la propriété : $v_n > v_{n+1}$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n .

• **Initialisation**

$v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(1 + v_0) = \ln(2) \approx 0,69$; donc $v_0 > v_1$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose que $v_n > v_{n+1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$v_n > v_{n+1}$ donc $1 + v_n > 1 + v_{n+1}$

Or la fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(1 + v_n) > \ln(1 + v_{n+1})$, ce qui veut dire que $v_{n+1} > v_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a démontré que, pour tout $n \geq 0$, on avait : $v_n > v_{n+1}$; donc la suite (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^e [\ln(x)]^n dx$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

$$I_{n+1} = \int_1^e [\ln(x)]^{n+1} dx = \int_1^e 1 \times [\ln(x)]^{n+1} dx$$

On va calculer I_{n+1} au moyen d'une intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$, et $v(x) = [\ln(x)]^{n+1}$ donc $v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times [\ln(x)]^n$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[x \times [\ln(x)]^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times [\ln(x)]^n dx \\ &= \left(e [\ln(e)]^{n+1} - 1 [\ln(1)]^{n+1} \right) - (n+1) \int_1^e [\ln(x)]^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

Exercice 4

5 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par $A(1 ; 2 ; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont

une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. On a $M(x ; y ; z) \in (d_1) \iff$ il existe $t' \in \mathbb{R}$, tel que $\vec{AM} = t' \vec{u}_1 \iff$

$$\begin{cases} x - 1 = 1t' \\ y - 2 = 2t' \\ z - (-1) = 0t' \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = -1 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

2. On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

- (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à \vec{u}_1 : les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

- (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$$\begin{cases} 0 = 1 + t' \\ 1 + t = 1 + t' \\ 2 + t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = t' \\ t = t' \\ t = -3 \end{cases} : \text{ce système n'a pas de solution.}$$

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

3. Soit \mathcal{P} le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires \vec{u}_1 et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.

Si un point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{w} , on sait que il existe α et β tels que : $\vec{AM} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{w}$,

soit avec les coordonnées :
$$\begin{cases} x - 1 = 1\alpha + 2\beta \\ y - 2 = 2\alpha - 1\beta \\ z + 1 = 0\alpha + 1\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha + 2\beta + 1 \\ y = 2\alpha - \beta + 2 \\ z = \beta - 1 \end{cases}$$

Or quels que soient α et β :

$$-2(\alpha + 2\beta + 1) + 1(2\alpha - \beta + 2) + 5(\beta - 1) + 5 = -2\alpha - 4\beta - 2 + 2\alpha - \beta + 2 + 5\beta - 5 + 5 = 0.$$

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x + 1y + 5z + 5 = 0$.

4. a. On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_1) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan \mathcal{P} .

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan \mathcal{P} .

Si F est commun à (d_2) et au plan \mathcal{P} ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \\ z = 2+t \\ -2x+y+5z+5 = 0 \end{cases}, \text{ d'où en remplaçant dans la dernière équation :}$$

$$-2 \times 0 + 1 + t + 5(2+t) + 5 = 0 \iff 1 + t + 10 + 5t + 5 = 0 \iff 6t + 16 = 0 \iff t = -\frac{8}{3},$$

d'où en remplaçant dans x, y , et z , on obtient $F\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur \vec{w} . On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1\right)$.

5. a. Des coordonnées du vecteur $\vec{EF} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ on déduit que :

$$\vec{EF} \cdot \vec{u}_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 = 0 \text{ et } \vec{EF} \cdot \vec{u}_2 = 0 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Conclusion : \vec{EF} est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2) , $E \in (d_1)$ et $F \in (d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .

b. On a $EF^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$.

Conclusion : $EF = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.