# Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Sud 21 novembre 2013

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

1. Diminuer le budget de 6 % sur un an revient à multiplier par $1-\frac{6}{100}=0,94$.

   Diminuer le budget de 6 % pendant deux ans revient à multiplier par $\left(1-\frac{6}{100}\right)^2=0,94^2=0,8836$.

   Diminuer le budget de 6 % pendant cinq ans revient à multiplier par $\left(1-\frac{6}{100}\right)^5=0,94^5\approx 0,7339$.

   Multiplier par 0,7339 revient à diminuer de $(1-0,7339)\times 100=26,61\,\%$ et pas de 30 % sur la période de 5 ans.

   **L'affirmation 1 est fausse.**

2. On étudie les variations de la fonction $B$ sur l'intervalle $[0\,;10]$ :

   $B'(x)=-2x+10>0$ sur $[0\,;5[$ et $B'(x)<0$ sur $]5\,;10]$.

   De plus $B(0)=-9$, $B(1)=-1+10-9=0$, $B(5)=-25+50-9=16$,

   $B(9)=-81+90-9=0$ et $B(10)=-100+100-9=-9$.

   D'où le tableau de variations de la fonction $B$ sur $[0\,;10]$ :

| $x$ | 0 | 1 | | 5 | | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | | + | 0 | − | | |
| $B(x)$ | $-9$ | 0 | $\nearrow$ | 16 | $\searrow$ | 0 | $-9$ |

   D'après ce tableau de variations, lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB (strictement), le bénéfice est positif.

   **L'affirmation 2a est vraie.**

   La fonction $B$ est maximale quand $x=5$ donc le bénéfice est maximum pour une production et vente de 5 000 clés USB.

   **L'affirmation 2b est vraie.**

   Le bénéfice mensuel moyen lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 clés et 8 000 clés correspond à la valeur moyenne de la fonction B entre 2 et 8, c'est-à-dire :

   $\dfrac{1}{8-2}\displaystyle\int_2^8 B(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\int_2^8 B(x)\,\mathrm{d}x$.

   $B$ est une fonction polynôme qui a pour primitive la fonction $b$ définie par

   $b(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+5x^2-9x$.

   $b(8)=-\dfrac{1}{3}8^3+5\times 8^2-9\times 8=-\dfrac{512}{3}+320-72=-\dfrac{512}{3}+248=-\dfrac{512}{3}+\dfrac{744}{3}=\dfrac{232}{3}$

   $b(2)=-\dfrac{1}{3}2^3+5\times 2^2-9\times 2=-\dfrac{8}{3}+20-18=-\dfrac{8}{3}+2=-\dfrac{8}{3}+\dfrac{6}{3}=\dfrac{-2}{3}$

   $\displaystyle\int_2^8 B(x)\,\mathrm{d}x=\Big[b(x)\Big]_2^8=b(8)-b(2)=\dfrac{232}{3}-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{234}{3}=78$ ; la valeur moyenne de la fonction entre 2 et 8 est donc $\dfrac{1}{6}\times 78=13$.

   Le bénéfice mensuel moyen lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 clés et 8 000 clés est donc de 13 000 euros.

   **L'affirmation 2 c est fausse.**

**3.** Si $n$ est la taille de l'échantillon, et $f$ la fréquence d'apparition du caractère recherché, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est approximativement $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Ici, $n = 4000$ et $f = \frac{210}{4000} = 0{,}0525$, donc

$I = \left[0{,}0525 - \frac{1}{\sqrt{4000}}\,;\, 0{,}0525 + \frac{1}{\sqrt{4000}}\right] \approx [0{,}0367\,;\,0{,}0684]$

La borne supérieure de l'intervalle de confiance est approximativement 0,0684 soit 6,84 % donc elle ne dépasse pas 7 % ; à l'issue du contrôle, le directeur des ventes ne doit donc pas stopper toute la chaîne de fabrication.

**L'affirmation 3 est fausse.**

**EXERCICE 2** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé du plan et $f'$ la fonction dérivée de $f$.

**1.** **a.** $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$

**b.** Pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ ; donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

Sur $]-\infty\,;\,1[$, $1-x > 0$ donc $f$ est strictement croissante.

Sur $]1\,;\,+\infty[$, $1-x < 0$ donc $f$ est strictement décroissante.

**2.** **a.** D'après la question 1.b, la fonction $f$ est strictement croissante sur $[-1\,;\,0]$ ; de plus $f(-1) = -\mathrm{e} + 1 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$.

D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $[-1\,;0]$.

**b.** D'après la calculatrice, $f(-0{,}6) \approx -0{,}09 < 0$ et $f(-0{,}5) \approx 0{,}18 > 0$ donc $\alpha \in \left[-0{,}06\,;\,-0{,}05\right]$.

**3.** L'équation réduite de la tangente au point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

En $a = 0$, l'équation de $T$ est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$ donc $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et on sait que $f(0) = 1$.

L'équation réduite de la tangente $T$ est : $y = x + 1$.

**4.** **a.** D'après le tableau donné dans le texte, $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)$ ; cette dérivée seconde est du signe de $x-2$ car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel $x$..

Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$, $x-2 < 0$ donc $f''(x) < 0$ et donc la fonction dérivée $f'$ est strictement décroissante.

Sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$, $x-2 > 0$ donc $f''(x) > 0$ et donc la fonction dérivée $f'$ est strictement croissante.

**b.** On sait qu'une fonction est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée première est croissante sur cet intervalle.

Or $f'$ est croissante sur $]2\,;\,+\infty[$, donc la fonction $f$ est convexe sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

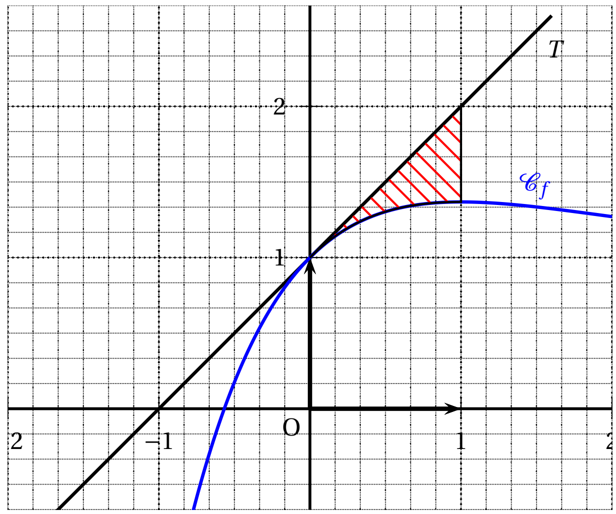
On sait qu'une fonction est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée première est décroissante sur cet intervalle.

Or $f'$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,2[$, donc la fonction $f$ est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$.

**c.** Une fonction est concave sur un intervalle quand sa courbe représentative est entièrement située en dessous de toutes ses tangentes. On sait que la fonction $f$ est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$ et que $T$ est une tangente à la courbe au point d'abscisse 0 qui appartient à $]-\infty\,;2[$.

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de $T$ sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

**5.** On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente $T$ dans un repère orthonormé.




**a.** On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(-1-x)+x$.

$F$ est une primitive de $f$ si et seulement si $F' = f$.

$F'(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{-x}(-1-x) + \mathrm{e}^{-x}(-1)+1 = \mathrm{e}^{-x}(1+x-1)+1 = x\,\mathrm{e}^{-x}+1$

$F'(x) = f(x)$. Donc $F$ est une primitive de $f$.

**b.** La tangente $T$ est d'équation $y = x+1$ donc c'est la représentation graphique de la fonction $g$ définie par $g(x) = x+1$.

On sait que sur $]-\infty\,;\,2[$ la droite $T$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ donc c'est encore vrai sur $[0\,;\,1]$ ; donc sur cet intervalle $g > f$ et donc $g - f > 0$.

D'après le cours, on peut dire que l'aire du domaine hachuré est, en unités d'aires,

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 \left(g-f\right)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la linéarité de l'intégration,

$\displaystyle\int_0^1 \left(g-f\right)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Or $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ donc

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1)-F(0) = \left(\mathrm{e}^{-1}(-2)+1\right) - \left(\mathrm{e}^{0}(-1)+0\right) = 2-\mathrm{e}^{-1}.$

Cette quantité correspond à l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

La fonction polynôme $g$ a pour primitive la fonction $G$ définie par $G(x) = \dfrac{x^2}{2}+x$. Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = G(1)-G(0) = \left(\frac{1}{2}+1\right) - 0 = \frac{3}{2}.$

L'aire vaut en unités d'aire : $\mathscr{A} = \dfrac{3}{2} - \left(2-2\,\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-1} - \dfrac{1}{2} \approx 0{,}236.$

**EXERCICE 3** **5 points**

**ES : enseignement obligatoire – L : enseignement de spécialité**

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

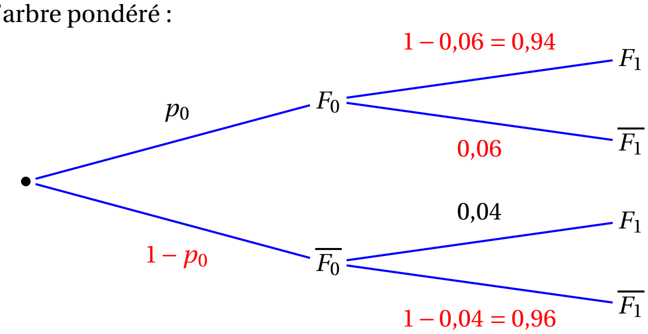
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- $F_0$ l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité $p_0$ et $\overline{F_0}$ son évènement contraire ;
- $F_1$ l'évènement « la personne interrogée le 1^er^ mois a une opinion favorable » de probabilité $p_1$ et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

**1. a.** On complète l'arbre pondéré :




**b.** D'après la formule des probabilités totales :

$p_1 = P(F_1) = P(F_0 \cap F_1) + P\left(\overline{F_0} \cap F_1\right) = p_0 \times 0,94 + \left(1 - p_0\right) \times 0,04$
$= 0,94p_0 + 0,04 - 0,04p_0 = 0,9p_0 + 0,04$

*On admet de plus, que pour tout entier naturel n,* $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04$.

**2.** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $I$ et $N$ sont des entiers naturels |
| | $P$ est un nombre réel |
| **Entrée :** | Saisir $N$ |
| **Initialisation :** | $P$ prend la valeur 0,55 |
| **Traitement :** | Pour $J$ allant de 1 à $N$ |
| | $P$ prend la valeur $0,9P + 0,04$ |
| | Fin Pour |
| **Sortie :** | Afficher $P$ |

**a.** Si l'utilisateur entre 1 pour valeur de $N$, on entre une fois dans la boucle et en sortie, on affiche $P$ c'est-à-dire $0,9 \times 0,55 + 0,04 = 0,535$.

La valeur affichée en sortie est $P = 0,535$.

**b.** Cet algorithme va afficher $P_N$.

**3.** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_n = p_n - 0,4$.

**a.** $u_n = p_n - 0,4$ donc $u_0 = p_0 - 0,4 = 0,55 - 0,4 = 0,15$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,4 = 0,9p_n + 0,04 - 0,4 = 0,9p_n - 0,36$. Or $u_n = p_n - 0,4$ donc $p_n = u_n + 0,4$

$u_{n+1} = 0,9\left(u_n + 0,4\right) - 0,36 = 0,9u_n + 0,36 - 0,36 = 0,9u_n$

Donc la suite $(u_n)$ est géométrique de premier terme $u_0 = 0,15$ et de raison $q = 0,9$.

**b.** D'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}15 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel $n$.

$p_n = u_n + 0{,}4 = 0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4$ pour tout entier naturel $n$.

**c.** La suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,9 ; or $-1 < 0{,}9 < 1$ donc la suite $(u_n)$ est convergente et a pour limite 0.

Or $p_n = u_n + 0{,}4$, donc d'après les théorèmes sur les limites de suites, on peut dire que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et a pour limite 0,4.

$p_n$ est la probabilité de l'évènement « la personne interrogée le $n$-ième mois a une opinion favorable ». La suite $\left(p_n\right)$ a pour limite 0,4 qui représente 40 %.

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : quand le nombre de mois augmente, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable tend vers 40 %.

**4. a.** $0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4 \leqslant 0{,}45 \Leftrightarrow 0{,}15 \times 0{,}9^n \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant \dfrac{0{,}05}{0{,}15} \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant \dfrac{1}{3}$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc :

$0{,}9^n \leqslant \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \ln\left(0{,}9^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Or $\ln(0{,}9) < 0$ donc $n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0{,}9)}$

**b.** $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 10{,}43$ ; l'entier immédiatement supérieur à 10,43 est 11 et 0,45 correspond à 45 %.

On peut donc dire qu'à partir du 11^e^ mois, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable est inférieur à 45 %.

## EXERCICE 3 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

— Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.

— Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note $S$ l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».

On note également pour tout entier naturel $n$ :

— $p_n$ la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du $n$-ième hiver ;

— $q_n$ la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du $n$-ième hiver ;

— $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du $n$-ième hiver.

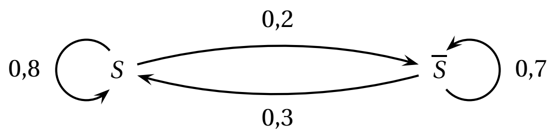
On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

### Partie A

**1.** Il y a une probabilité de passer de $S$ à $\overline{S}$ de 0,2 donc il y a une probabilité de $1 - 0{,}2 = 0{,}8$ de rester sur le sommet $S$.

Il y a une probabilité de passer de $\overline{S}$ à $S$ de 0,3 donc il y a une probabilité de $1 - 0{,}3 = 0{,}7$ de rester sur le sommet $\overline{S}$.

On représente la situation à l'aide d'un graphe pondéré de sommets $S$ et $\overline{S}$ :




2. **a.** La matrice de transition $M$ est une matrice carrée $2 \times 2$ telle que
$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times M$
D'après le graphe, on peut écrire : $\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n \\ q_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7q_n \end{cases}$
et donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

**b.** $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}3 & 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}7 \\ 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}3 & 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}7 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}64 + 0{,}06 & 0{,}16 + 0{,}14 \\ 0{,}24 + 0{,}21 & 0{,}06 + 0{,}49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

**c.** $P_2 = \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} \times M$ ; or $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} \times M$ ; donc
$P_2 = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 \times 0{,}7 + 0 \times 0{,}45 & 1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

3. On a vu que $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$ ; or $q_n = 1 - p_n$, donc
$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}3(1 - p_n) = 0{,}8p_n + 0{,}3 - 0{,}3p_n = 0{,}5p_n + 0{,}3$.

4. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | |
| ① | $J$ et $N$ sont des entiers naturels |
| ② | $p$ est un nombre réel |
| **Entrée :** | |
| ③ | Saisir $N$ |
| **Initialisation :** | |
| ④ | $p$ prend la valeur 1 |
| **Traitement :** | |
| ⑤ | Pour $J$ allant de 1 à $N$ |
| ⑥ | $p$ prend la valeur ....................... |
| ⑦ | Fin Pour |
| **Sortie :** | |
| ⑧ | Afficher $p$ |

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité $p_N$.

**Partie B**

On considère, pour tout entier naturel $n$, l'évènement $S_n$ : « la personne pratique le ski de piste lors du $n$-ième hiver ». La probabilité de l'évènement $S_n$ est notée $p(S_n)$. On a donc $p_n = p(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel $n$, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.
Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = p_n - 0{,}6$.

1. On sait que $u_n = p_n - 0{,}6$ donc $p_n = u_n + 0{,}6$.
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5p_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5(u_n + 0{,}6) - 0{,}3 = 0{,}5u_n + 0{,}3 - 0{,}3$ ;
$u_{n+1} = 0{,}5u_n$.
$u_0 = p_0 - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
Donc la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_0 = 0{,}4$.

**2.** $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_0 = 0{,}4$ donc, d'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}4 \times 0{,}5^n$ pour tout entier naturel $n$.

$p_n = u_n + 0{,}6 = 0{,}4 \times 0{,}5^n + 0{,}6$ pour tout entier naturel $n$.

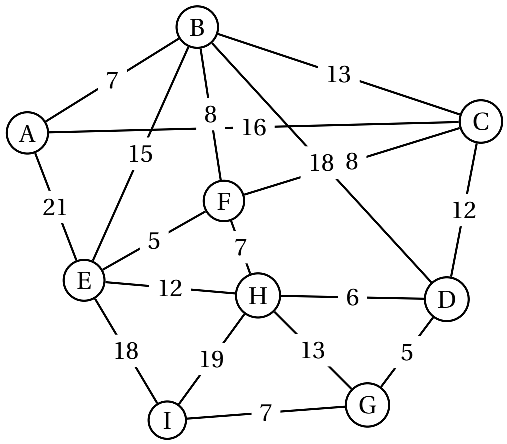
**3.** La suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,5 ; or $-1 < 0{,}5 < 1$ donc la suite $(u_n)$ est convergente et a pour limite 0.

Or $p_n = u_n + 0{,}6$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut dire que la suite $(p_n)$ est convergente et a pour limite 0,6.

Le nombre $p_n$ désigne la probabilité qu'une personne pratique le ski lors du $n$-ième hiver ; cette probabilité tend vers 0,6. Cela veut dire que le nombre de personnes pratiquant le ski de piste tend à se rapprocher de 60 %.

**Partie C**

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.




On détermine, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | on garde |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | A |
| | 7(A) | 16 (A) | ∞ | 21(A) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | B |
| | | 20(B) | 25(B) | ~~22(B)~~<br>21(A) | 15(B) | ∞ | ∞ | ∞ | F |
| | | ~~23(F)~~<br>20(B) | 25(B) | ~~21(A)~~<br>20(F) | | ∞ | 22(F) | ∞ | C |
| | | | ~~32(C)~~<br>25(B) | 20(F) | | ∞ | 22(F) | ∞ | E |
| | | | 25(B) | | | ∞ | ~~32(E)~~<br>22(F) | 38(E) | H |
| | | | ~~28(H)~~<br>25(B) | | | 35(H) | | ~~41(H)~~<br>38(E) | D |
| | | | | | | ~~35(H)~~<br>30(D) | | 38(E) | G |
| | | | | | | | | ~~38(E)~~<br>37(G) | I |

Le plus court trajet pour aller de A à I a une longueur de 37 et se décompose ainsi :

$A \xrightarrow{7} B \xrightarrow{18} D \xrightarrow{5} G \xrightarrow{7} I$

**EXERCICE 4** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

Dans un cabinet d'assurance, une étude est réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût.

**Partie A**

Une enquête affirme que 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.

**1.** Dans le cadre d'une étude approfondie, on choisit au hasard et de manière indépendante 15 clients.
On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.

**a.** Comme 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année, la probabilité qu'une personne déclare un sinistre est 0,3.
Choisir au hasard et de manière aléatoire 15 clients, revient à extraire 15 noms avec remise et de manière indépendante.
Donc la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,3$.

**b.** Si $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
L'évènement $(X \geqslant 1)$ est l'évènement contraire de $(X < 1)$ donc
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.
$P(X = 0) = \binom{15}{0} 0,3^0\, 0,7^{15} \approx 0,005$ ; donc $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0,005 \approx 0,995$.

**2. a.** Pour $n$ assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est
$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où $p$ désigne la proportion dans la population.
$n = 100$ et $p = 0,3$ donc
$I = \left[0,3 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,3(1-0,3)}}{\sqrt{100}} \; ; \; 0,3 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,3(1-0,3)}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0,210 \; ; \; 0,390]$

**b.** L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année, ce qui fait une proportion de $\dfrac{19}{100} = 0,19$.
Or $0,19 \notin I$ donc on peut dire que l'affirmation du cabinet d'assurance, « 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année », ne peut pas être validée par l'expert.

**Partie B**

On note $Y$ la variable aléatoire donnant le coût, en euros, des sinistres de faible gravité sur le deuxième semestre de l'année ; on admet que la variable aléatoire $Y$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 1200$ et d'écart-type $\sigma = 200$.

**1.** Dans cette question, on cherche $P(1000 \leqslant Y \leqslant 1500)$ ; la calculatrice donne 0,775 comme résultat arrondi à $10^{-3}$.
La probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût compris entre 1 000 € et 1 500 € est de 0,775.

**2.** Dans cette question, on cherche $P(Y > 1\,000)$ qui est égal à $1 - P(0 \leqslant Y \leqslant 1\,000)$ car le sinistre ne peut pas avoir un coût négatif.
La calculatrice donne $P(0 \leqslant Y \leqslant 1\,000) \approx 0,159$ donc la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût supérieur à 1 000 € est $1 - 0,159 = 0,841$.