Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Voir l'annexe.

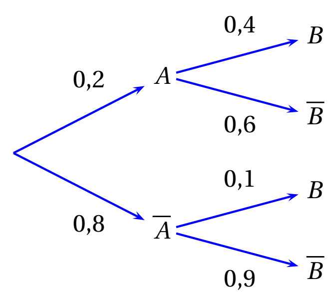
EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.

1. a.



b. On a $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,4 = 0,6$.

De même $p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,1 = 0,9$.

2. a. On a $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.

b. D'après la loi des probabilités totales :

$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,08 + 0,8 \times 0,1 = 0,08 + 0,08 = 0,16$.

c. On a $p(A \cap B) = 0,08$ et $p(A) \times p(B) = 0,2 \times 0,16 = 0,32$.

Donc $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. Il faut trouver :

$p_B(A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B)} = \dfrac{0,08}{0,16} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

Partie II

1.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité	0,72	0,08	0,12	0,08

2. L'espérance de la loi de probabilité précédente est égale à :

$2 \times 0,72 + 10 \times 0,08 + 15 \times 0,12 + 20 \times 0,08 = 1,44 + 0,8 + 1,8 + 1,6 = 5,64$ (€) pour une personne contactée en moyenne.

Donc pour 5 000 lecteurs potentiels on peut espérer récupérer :

$5000 \times 5,64 = 28200$ (€).

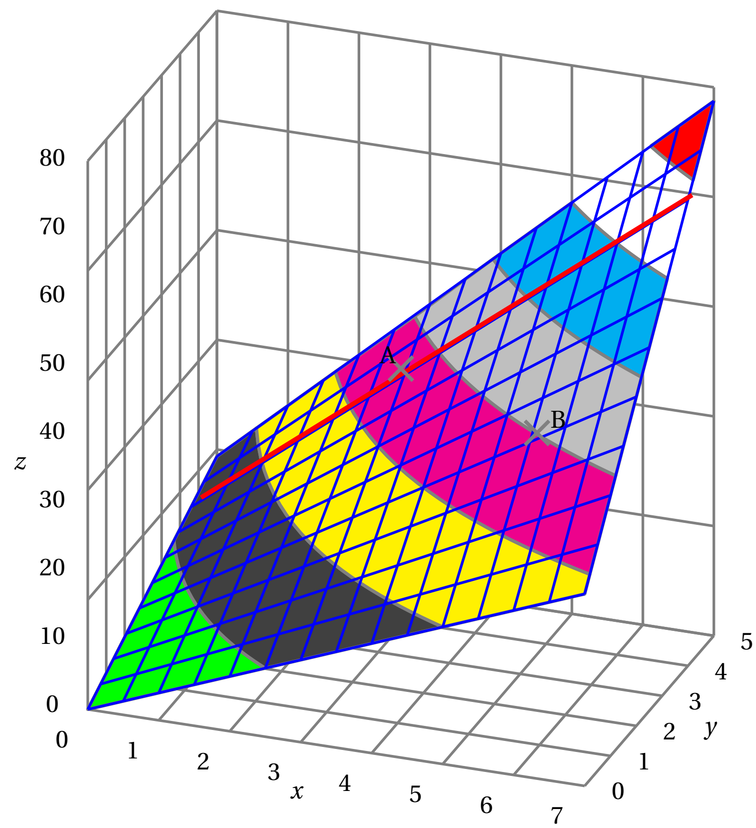
EXERCICE 2 **5 points**

Candidat ayant choisi l'enseignement de spécialité

$$f(x\,;\,y) = 4x + 3y + xy.$$

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A



1. **a.** Voir la figure.

   b. Pour A : $f(3\,;\,4) = 12 + 12 + 12 = 36$, est la cote de A ;

   Pour B : $f(x\,;\,2) = 4x + 6 + 2x = 40$ soit $6x + 6 = 40$ ou $6x = 34$ et $x = \dfrac{17}{3}$.

2. On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 4 \\ z & = & 4x + 3y + xy \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 4 \\ z & = & 4x + 12 + 4x \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 4 \\ z & = & 8x + 12 \end{array}\right.$

   $\mathscr{L}$ est donc l'intersection de deux plans donc une droite colorée en rouge sur la figure.

Partie B

1. **a.** $x = 3$ et $y = 5$, donc $f(3\,;\,5) = 4 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 5 = 12 + 15 + 15 = 42$ millions d'euros.

   b. $x = 7$ et $y = 1$, donc $f(7\,;\,1) = 4 \times 7 + 3 \times 1 + 7 \times 1 = 28 + 37 = 38$ millions d'euros.

2. **a.** On a donc $x + y = 8$, soit $y = 8 - x$.

   On a donc $f(x\,;\,y) = 4x + 3(8 - x) + x(8 - x) = 4x + 24 - 3x + 8x - x^2 = -x^2 + 9x + 24$.

   Donc $g(x) = -x^2 + 9x + 24$.

b. La hausse est représentée par un trinôme du second degré ; le maximum de ce trinôme est obtenu quand sa dérivée s'annule.

Or $g'(x) = -2x + 9$ et $g'(x) = 0 \iff x = \dfrac{9}{2} = 4,5$.

Il faudra donc investir 4,5 millions d'euros dans le secteur P et 3,5 millions d'euros dans le secteur C pour une hausse maximale de :

$g(4,5) = -4,5^2 + 9 \times 4,5 + 24 = 44,25$ millions d'euros.

EXERCICE 3 — 5 points

1. a. $\dfrac{45}{298} \times 100 \approx 15\,\%$ des clients de la banque sont abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année 2001.

b. $\dfrac{103-45}{45} \times 100 \approx 129\,\%$: taux d'accroissement du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » entre le 1er janvier 2001 et le 1er janvier 2006.

2. a. La calculatrice donne $y = 9,9x + 290$.

b. 2010 correspond au rang 10. On a donc l'estimation :

$y = 9,9 \times 10 + 290 = 99 + 290 = 389$ soit 389 000 clients en 2010.

3. a. $z = \ln q = \iff q = \mathrm{e}^{0,165x+3,642} = \mathrm{e}^{3,642} \times \mathrm{e}^{0,165x} = \mathrm{e}^{3,642} \times \left(\mathrm{e}^{0,165}\right)^x$.

Comme $\mathrm{e}^{3,642} \approx 38,17$ et $\mathrm{e}^{0,165} \approx 1,18$, on a finalement :

$q \approx 38,17 \times 1,18^x$.

b. Avec cette estimation on obtient pour 2010, soit pour $x = 10$:

$q \approx 38,17 \times 1,18^{10} \approx 199,8$.

Donc pratiquement 200 000 clients de la banque seront abonnés à « bank.net » en 2010.

c. Selon les deux estimations en 2010 sur 389 milliers de clients 200 seraient à « bank.net » soit $\dfrac{200}{389} \times 100 \approx 51,4\,\%$.

4. 2016 correspond au rang $x = 16$.

Le nombre de clients serait $9,9 \times 16 + 290 = 448,4$ milliers et

le nombre d'abonnés à « bank.net » serait $38,17 \times 1,18^{16} \approx 539,3$ milliers, ce qui est stupide puisque supérieur au nombre de clients.

Conclusion : l'un au moins des deux modèles n'est pas correct.

EXERCICE 4 — 6 points

1. B a une ordonnée nulle ; or $f(x) = 0 \iff (2 - \ln x)\ln x = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2 - \ln x &=& 0 \\ \ln x &=& 0 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2 &=& \ln x \\ \ln x &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^2 &=& x \\ x &=& 1 \end{array}\right.$

La solution $x = 1$ correspond au point A et la solution $x = \mathrm{e}^2$ au point B.

2.
- On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}(2 - \ln x) = +\infty$ et par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
- On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty}(2 - \ln x) = -\infty$ et par produit de limites

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. a. En dérivant f comme un produit de fonctions :

$f'(x) - \dfrac{1}{x} \times \ln x + (2 - \ln x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-\ln x + 2 - \ln x}{x} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x} = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.

b. La tangente en C est horizontale, donc en ce point le nombre dérivé est nul ; or

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$ soit $1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = \text{e}$.

C a pour abscisse $\text{e} \approx 2,718$.

L'équation de la tangente en A d'abscisse 1 est : $y - 0 = f'(1)(x-1)$ soit $y = 2(x-1)$.

Cette tangente coupe l'axe des ordonnées pour $x = 0$, soit $y = -2$.

D a pour ordonnée -2.

4. a. La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = f(x) + 2\ln x - 4 + x\left[f'(x) + \dfrac{2}{x}\right] = f(x) + 2\ln x - 4 + x \times \dfrac{2(1-\ln x)}{x} + 2 =$

$f(x) + 2\ln x - 4 + 2(1-\ln x) + 2 = f(x) + 2\ln x - 4 + 2 - 2\ln x + 2 = f(x)$.

Conclusion g est une primitive de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. On a donc :

$\displaystyle\int_1^{\text{e}^2} f(x)\,\text{d}x =$

$\left[g(x)\right]_1^{\text{e}^2} = g\left(\text{e}^2\right) - g(1) = \text{e}^2\left[f\left(\text{e}^2\right) + 2\ln \text{e}^2 - 4\right] - \left(1[f(1) + 2\ln 1 - 4]\right) =$

$\text{e}^2\left(\left(2 - \ln \text{e}^2\right)\ln \text{e}^2 + 4 - 4\right) + 4 = 4$ unités d'aire.

Sur l'intervalle $\left[1\ ;\ \text{e}^2\right]$, la fonction f est positive, donc l'intégrale calculée ci-dessus est égale à l'aire, en unités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}^2$.

On vérifie (approximativement) que cette aire vaut quatre unités.

Annexe 1 (à rendre avec sa copie)

Exercice 1

Affirmations	V	F
a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.		•
b. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.		•
c. $f'(1) = f(1)$.	•	
d. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < 5$.		•
e. $\displaystyle\int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x < 1$.	•	
f. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.	•	
g. $F(5) > F(6)$.		•
h. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.		•

Annexe 2

Exercice 3

Représentation graphique des séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ q_i)$