Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

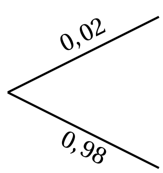
1. On a une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,02$.
   On a donc $p(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0,02^2 \times 0,98^{48} \approx 0,1858 \approx 0,19$.
2. La probabilité cherchée est $p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98^{50} \approx 0,635 \approx 0,64$.
3. On a $\text{E}(X) = n \times p = 50 \times 0,02 = 1$.

Partie B

1. **a.** On a $P([1000\ ;\ +\infty]) = 1 - \displaystyle\int_0^{1000} 5\times10^{-4}\text{e}^{-5\times10^{-4}t}\,\text{d}t = 1 + \left[\text{e}^{-5\times10^{-4}t}\right]_0^{1000} =$ $\text{e}^{-5\times10^{-4}\times10^3} = \text{e}^{-0,5} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}} \approx 0,606 \approx 0,61$.

   b. Même calcul avec λ_2 : $P([1000\ ;\ +\infty]) =$ $1 - \displaystyle\int_0^{1000} 10^{-4}\text{e}^{10^{-4}t}\,\text{d}t = 1 + \left[\text{e}^{-10^{-4}t}\right]_0^{1000} = \text{e}^{10^{-4}\times10^3} = \text{e}^{-0,1} \approx 0,904 \approx$ $0,90$.

2.



$$P(T \geqslant t) = 1 - \int_0^t 5\times10^{-4}\text{e}^{-5\times10^{-4}t}\,\text{d}t = 0,02\text{e}^{-5\times10^{-4}t}$$

$$P(T \geqslant t) = 1 - \int_0^t 10^{-4}\text{e}^{-10^{-4}t}\,\text{d}t = 0,98\text{e}^{-10^{-4}t}$$

   D'où en faisant la somme, le résultat demandé.

3. On a $P_{(T\geqslant1000)}(\text{défectueux}) = \dfrac{P[(T\geqslant1000)\cap(\text{défectueux})]}{P(T\geqslant1000)} =$ $\dfrac{0,02\times\text{e}^{-0,5}}{0,02\times\text{e}^{-0,5}+0,98\times\text{e}^{-10^{-1}}} \approx 0,013 \approx 0,01$.

EXERCICE 2 **5 points**

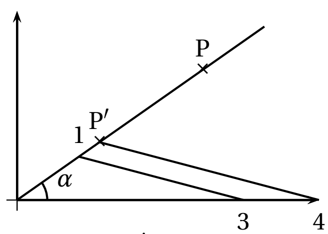
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Un point $M(z)$ est invariant si et seulement si $z' = z = \dfrac{4}{\overline{z}} \iff z\overline{z} = 4 \iff$ $|z|^2 = 4 \iff |z| = 2$.
   Les points invariants sont donc tous les points dont l'affixe a pour module 2 ; le cercle de centre O et de rayon 2 est donc invariant par f.
2. On a $z' = 1 = \dfrac{4}{\overline{z}} \iff \overline{z} = 4 \iff z = 4$.
   Le seul point dont l'image par f est J est le point d'affixe 4.
3. Si $\alpha = a + \text{i}b \neq 0$ a un antécédent z par f, alors $a + \text{i}b = \dfrac{4}{x+\text{i}y} \iff (a+\text{i}b)(x+$ $\text{i}y) = 4 \iff \left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& 4\\ bx-ay &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{4a}{a^2+b^2}\\ y &=& \dfrac{4b}{a^2+b^2}\end{array}\right.$
   Conclusion : le seul antécédent de α par f est le complexe $z = \dfrac{4\alpha}{|\alpha|^2}$.

4. **a.** On a d'après la définition de f et en prenant les arguments :
$\left(\vec{u}\,, \overrightarrow{OM'}\right) = 0 - \| \left[-\left(\vec{u}\,, \overrightarrow{OM}\right)\right] = \left(\vec{u}\,, \overrightarrow{OM}\right)$; donc $\left(\overrightarrow{OM}\,, \overrightarrow{OM'}\right) = 0$ modulo 2π. Autrement dit : les points O, M et M' sont alignés.

   b. On a $\left|z'\right| = \left|\dfrac{4}{\overline{z}}\right| = \dfrac{4}{|\overline{z}|} = \dfrac{4}{|z|}$.
   Donc si $|z| = r > 0$, alors $\left|z'\right| = \dfrac{4}{r}$.
   L'image du cercle de centre O et de rayon r est donc le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{4}{r}$. D'après la question précédente à chaque point du premier cercle correspond un point image aligné avec O : conclusion, l'image du cercle est tout le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{4}{r}$.

   c. Si OP = 3, $z_{\text{P}} = 3\text{e}^{\text{i}\alpha}$ et $z_{\text{P}'} = \dfrac{4}{3}(\cos\alpha + \text{i}\sin\alpha)$. D'où une construction de P$'$:



5. Si $M(z) \in \mathscr{C}_1(\text{J}\ ;\ r = 1)$, alors $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\alpha},\ \alpha \neq \pi$, d'où $z' = \dfrac{4}{1 + \cos\alpha - \text{i}\sin\alpha} = \dfrac{4(1 + \cos\alpha + \text{i}\sin\alpha}{1 + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dfrac{4(1 + \cos\alpha + \text{i}\sin\alpha}{2 + 2\cos\alpha} = 2 + \text{i}\dfrac{2\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.
Conclusion : le point M' a une abscisse égale à 2. Il appartient à la droite (D) d'équation $x = 2$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On sait que l'écriture de la similitude s est $z' = \alpha z + \beta$, avec α et β complexes.
Or $s(\text{A}) = \text{B}$ et $s(\text{C}) = \text{D}$ se traduit par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 + 2\text{i} & = & \alpha\text{i} + \beta \\ 3 + 2\text{i} & = & \alpha\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & \alpha \\ 1 + 2\text{i} & = & 2 + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & \alpha \\ 1 & = & \beta \end{array}\right.$$
L'écriture complexe de s est donc : $z' = 2z + 1$.
On trouve aussitôt que le seul point fixe est le point d'affixe -1, donc le centre de cette similitude.
$z' = 2z + 1 \iff z' + 1 = 2z + 2 \iff z' + 1 = 2(z + 1)$. On reconnaît une homothétie dont le centre est le point d'affixe -1 et de rapport 2.
2. On peut écrire $1U_{n+1} - 2U_n = 1$ ce qui montre d'après le théorème de Bezout que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.
3. s étant une homothétie de rapport 2, les termes (naturels) de la suite sont les affixes des points obtenus successivement en prenant les symétriques du point d'affixe -1 autour du point précédent.
4. Démonstration par récurrence :
Initialisation : $U_0 = 2^0 - 1 = 0$: vraie donc au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la relation soit vraie à ce rang :
$U_n = 2^n - 1$. Alors $U_{n+1} = 2U_n + 1 = 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. La relation est vraie au rang $(n + 1)$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n + 1$; elle est donc vraie par récurrence pour tout naturel n.

5. Calculons $U_p\left(U_{n-p}+1\right)+U_{n-p}=\left(2^p-1\right)\left(2^{n-p}-1+1\right)+2^{n-p}=$ $2^n-2^{n-p}+2^{n-p}-1=2^n-1=U_n$.
   L'égalité précédente peut s'écrire : $U_n-U_p\left(U_{n-p}+1\right)=U_{n-p}$.
   Le pgcd à U_n et U_p, divise U_p, donc aussi $U_p\left(U_{n-p}+1\right)$ et par différence divise $U_n-U_p\left(U_{n-p}+1\right)$ c'est-à-dire U_{n-p} et c'est le plus grand diviseur commun. Donc $\text{pgcd}\left(U_n,\ U_p\right)=\text{pgcd}\left(U_p,\ U_{n-p}\right)$.
6. On sait que pour $x\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{N}$, $x^a-1=(x-1)(\ldots)$, donc $x-1$ divise x^a-1.
   Soit d le pgcd de U_n et U_p. Il existe donc deux naturels k et k' premiers entre eux tels que $n=kd$ et $p=k'd$.
   De plus il n'existe pas d'autre écriture de n et p sous forme de produit avec un facteur commun supérieur à d, d'après la définition du pgcd.
   $U_n=2^n-1=2^{kd}-1=\left(2^d\right)^k-1=\left(2^d-1\right)(\ldots)$, c'est-à-dire que 2^d-1 divise U_n.
   De même $U_p=2^p-1=2^{k'd}-1=\left(2^d\right)^{k'}-1=\left(2^d-1\right)(\ldots)$, c'est-à-dire que 2^d-1 divise U_p.
   Donc $2^d-1=U_d=U_{\text{pgcd}(n,\ p)}$ est le plus grand diviseur commun à U_n et U_p.
   Application : $15=3\times5$. Or 5 divise 2 005, mais 3 ne le divise pas. Donc $\text{pgcd}(U_{2\,005},\ U_5)=U_5$ (d'après la question précédente).
   $U_5=2^5-1=32-1=31$.
   Conclusion : $\text{pgcd}(U_{2\,005},\ U_5)=31$.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. V (voir 2)
2. V car $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times\dfrac{1}{2}$
3. V car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$ (par projection sur le plan (ABC))
4. F, car $\tan\widehat{BIC}=\dfrac{1}{0.5}=2\neq\tan\dfrac{\pi}{3}$.
5. F : une équation paramétrique de la droit (IJ) est $\left\{\begin{array}{lcl}x&=&\dfrac{1}{2}+t\\ y&=&2t\\ z&=&t\end{array}\right.$
6. V en écrivant une équation de la droite $(J, \overrightarrow{JI})$.
7. F : c'est une équation de plan.
8. F :
9. V : une équation du plan (FIJ) est : $4x-y-2z=2$.
10. V : en prenant la base (EFI) et la hauteur CB, on a $\mathcal{A}(\text{EFI})=\dfrac{1\times1}{2}=\dfrac{1}{2}$.
    Donc $V(\text{EFIJ})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{6}$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $f(0)=1$ et $g(0)=0$, ce qui permet de distinguer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. $f(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)^2} = \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$; f étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.
   $g(-x) = (-x)^2\mathrm{e}^{-(-x)^2} = x^2\mathrm{e}^{-x^2} = g(x)$; pour les mêmes raisons la fonction g est paire.
3. Dérivée : $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ qui est signe de $-x$: donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   En posant $x^2 = X$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   De même pour g, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(2x - 2x^3\right) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}\left(1 - x^2\right)$, qui est du signe de $x\left(1 - x^2\right)$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. La limite est identique au voisinage de $-\infty$.
   On obtient les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	0	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0
g'		$+$	0	-	0	$+$	0	-	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

4. Soit $d(x) = f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\left(1 - x^2\right)$ qui est du signe de $1 - x^2$, donc positive sur $[-1\,;\,1]$, négative ailleurs. Conclusion :
   — Sur $[-1\,;\,1]$, $f(x) \geqslant g(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$;
   — Sur $]-\infty\,;\,-1[\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$.

Partie B

1. f étant dérivable donc continue, G est la primitive de la fonction g qui s'annule en 0.
2. Pour $x > 0$, $G(x)$ représente en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations, $X = 0$ et $X = x$.
3. On a par définition $G'(x) = g(x)$ et d'après la question 3 de la partie A, $g(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction G est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Les fonctions t et $t\mathrm{e}^{-t^2}$ étant dérivables, on peut intégrer $G(x)$ par parties.
   Posons $\left\{\begin{array}{ll} u = -\dfrac{t}{2} & \mathrm{d}v = -2t\mathrm{e}^{-t^2} \\ \mathrm{d}u = -\dfrac{1}{2} & v = \mathrm{e}^{-t^2} \end{array}\right.$
   D'où $G(x) = \left[-\dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + \dfrac{1}{2}F(x)$, d'où enfin
   $G(x) = \dfrac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$.

5. **a.** Soit $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Toutes les fonctions de l'égalité précédente étant continues, on peut en déduire à la limite que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \dfrac{\ell}{2}$.

b. $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(1) - G(1)$.
N représente donc l'aire de la surface limitée par les droites $x = 0$, $x = 1$, et les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

c. N est l'aire de la surface en gris clair et ℓ est l'aire de la surface hachurée.
On voit graphiquement que $\mathrm{N} > \dfrac{\ell}{2}$.