

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud
novembre 2006

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AD}$. Les points A, B et D ne sont pas alignés.

2. Les égalités $3 + 1 = 4$ et $0 + 4 = 4$ sont vraies ; les points A et B appartiennent au plan. Donc la droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Les coordonnées des trois points vérifient l'équation. L'équation proposée est bien celle du plan (BCD), ces trois points étant manifestement disjoints deux à deux.
4. Les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation précédente. Donc A n'appartient pas au plan (BCD). Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD) si et seulement si la distance de A à ce plan est égale au rayon du cercle, c.-à-d. si

$$d(A, (BCD)) = \frac{81}{\sqrt{18^2 + 9^2 + 5^2}} = 9 \iff \frac{81}{\sqrt{430}} = 9 \text{ qui est une égalité fautive. La proposition est fautive.}$$

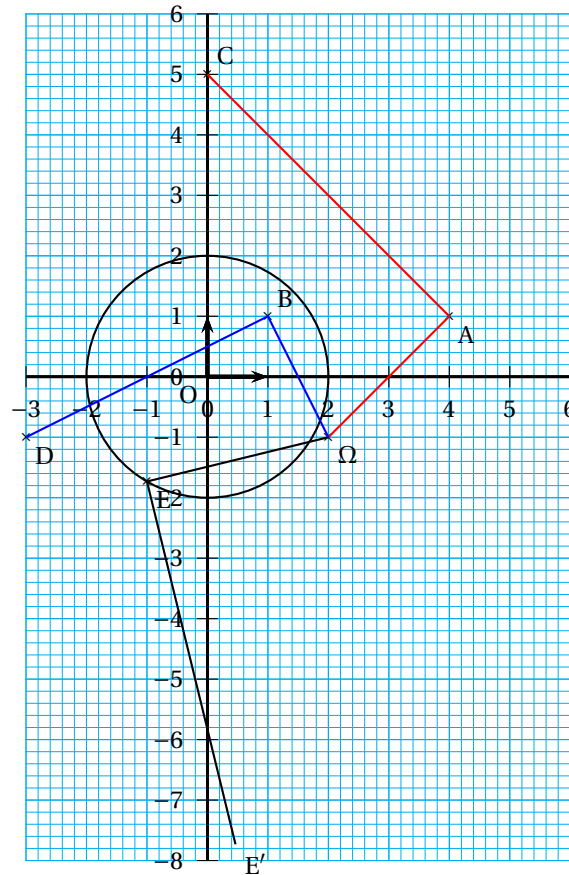
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est obtenue en traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BD}$ qui se traduit par le système :
$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -5 + 9\lambda \end{cases}$$
 qui se traduit en posant $2\lambda = 1 - 2k \iff \lambda = \frac{1}{2} - k$ par le système proposé par l'énoncé. La proposition est vraie.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Cf. cours.
2. Voir la figure
3. a. On obtient $z_{A'} = 5i = z_C$ et $z_{B'} = -3 - 3i = z_D$.
b. $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z = (1 + 2i)z - 2 - 4i \iff 2iz = 2 + 2i \iff z = 2 - i$. L'équation ayant une seule solution, f a un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = 2 - i$.
4. a. On a $z' - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z)$.
b. En prenant le module des deux complexes ci-dessus, on obtient $MM' = |-2i| \times \Omega M$ et si $\Omega \neq M$, $\frac{MM'}{\Omega M} = 2$.
L'égalité trouvée au a peut, si $\Omega \neq M$, s'écrire $\frac{z' - z}{2 - i - z} = -2i$. En prenant les arguments de ces deux complexes, on obtient $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$.
c. On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en M .
d. On a $|z_E|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$.
Donc $z_E = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right] = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.



Pour placer le point E, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.

D'après les questions b et c on a $EE' = 2\Omega E$ et $(\vec{E\Omega}, \vec{EE'}) = -\frac{\pi}{2}$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite (EΩ) et on place sur cette droite le point E' tel que $EE' = 2\Omega E$ et $(\vec{E\Omega}, \vec{EE'}) = -\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Cf. cours
2. — On cherche n tel que $2^n \equiv 1 \pmod{7}$; $n = 3$ est le premier naturel qui convient.
 — On cherche n tel que $3^n \equiv 1 \pmod{7}$; $n = 6$ est le premier naturel qui convient car $3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1$.
3. a. Soit $a \in \mathbb{N}, a \neq 7k, k \in \mathbb{N}$. Il existe $r \in \mathbb{N}, r < 7$ tel que $a = 7k + r$. On a donc $a \equiv r \pmod{7}$, donc $a^6 \equiv r^6 \pmod{7}$.
 Or :
 - $1^6 \equiv 1 \pmod{7}$: évident ;
 - $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ donc d'après la propriété 1 b ci-dessus, $(2^3)^2 \equiv 1^2 \pmod{7}$;
 - $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$;
 - $4^6 = (2^2)^3 = (2^3)^2$; d'après la propriété 1 b ci-dessus $2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (2^3)^2 \equiv 1 \pmod{7}$.

- $5^6 = 15625 = 7 \times 2232 + 1$, donc $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
 - Enfin $6^6 = (2 \times 3)^6 = 2^6 \times 3^6$, donc d'après la propriété du 1 a, $6^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
- Conclusion : on a démontré que dans tous les cas : $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

b. On a $a^k \equiv 1 \pmod{7}$, k étant le plus petit naturel vérifiant cette congruence.

D'autre part $6 = kq + r$ avec $r < k$.

On a donc $a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = (a^k)^q \times a^r$. Or $a^k \equiv 1 \pmod{7}$, donc $a^6 \equiv a^r \equiv 1 \pmod{7}$. Donc $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.

Or k étant le plus petit naturel vérifiant $a^k \equiv 1 \pmod{7}$, il en résulte que $r = 0$, c'est-à-dire que k divise 6.

Les valeurs possibles pour k sont donc 1, 2, 3 et 6.

c. On a trouvé l'ordre de 2 : c'est 3, donc l'ordre de 4 est aussi 3 et l'ordre de 3, c'est 6; on a vu que l'ordre de 5 est 6.

4. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$.

On a $2006 = 6 \times 334 + 2$. Donc $2^{2006} = 2^{6 \times 334 + 2} = 2^{6 \times 334} \times 2^2 = (2^6)^{334} \times 2^2$. Or $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$, donc finalement $2^{2006} \equiv 2^2 \pmod{7}$. De même pour les autres puissances, donc $A_n \equiv 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \pmod{7}$, soit $A_n \equiv 90 \equiv 6 \pmod{7}$ (car $90 = 7 \times 12 + 6$).

Finalement $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. On a une loi de Bernoulli de paramètres $p = \frac{1}{4}$ et $n = 50$.

b. On a $E = np = 50 \times \frac{1}{4} = 12,5$. (tulipes jaunes)

c. On a $p(X = n) = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

d. $p(X = 15) = \binom{50}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-15} \approx 0,089$.

2. a. Si lot choisi est le 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi de Bernoulli a ici pour paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :

$$p_B(J_n) = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \binom{50}{n} 2^{-50}.$$

b. De la même façon que précédemment $p_A(J_n) = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} =$

$$\binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}.$$

A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$p(J_n) = p(A \cap J_n) + p(B \cap J_n) = p(A) \times p_A(J_n) + p(B) \times p_B(J_n) = \frac{1}{2} \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2} \binom{50}{n} \times \frac{1}{2^{50}} = \frac{1}{2} \binom{50}{n} \left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}} \right).$$

$$c. p_n = p_{J_n}(A) = \frac{p(A \cap J_n)}{p(J_n)} = \frac{p_A(J_n) \times p(A)}{p(J_n)} = \frac{\frac{1}{2} \binom{50}{n} \frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\frac{1}{2} \binom{50}{n} \left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}} \right)} =$$

$$\frac{\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}} \right)} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

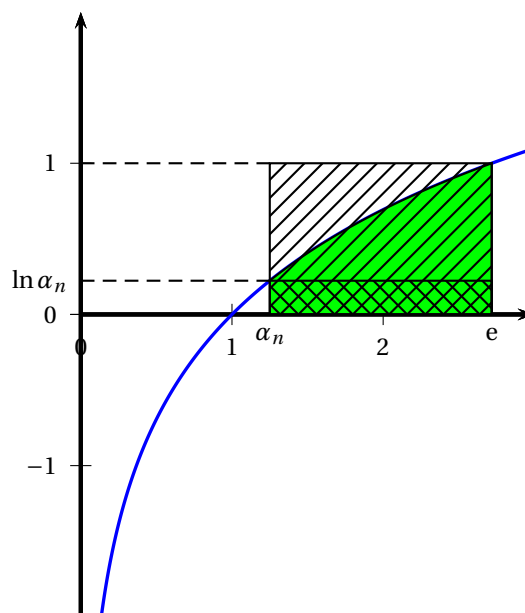
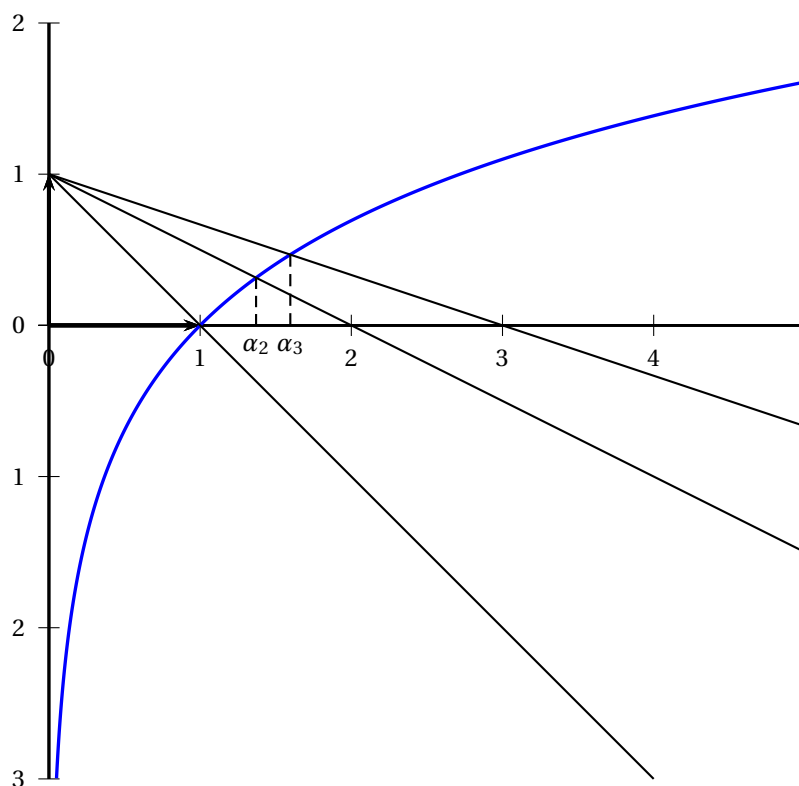
$$\begin{aligned} \text{d. } p_n \geq 0,9 &\Leftrightarrow \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}} \geq 0,9 \Leftrightarrow 3^{50-n} \geq 0,9(3^{50-n} + 2^{50}) \Leftrightarrow \\ &0,1 \times 3^{50-n} \geq 0,9 \times 2^{50} \Leftrightarrow (50-n) \ln 3 \geq \ln(9) + 50 \ln 2 \Leftrightarrow \\ &50-n \geq \frac{\ln 9 + 50 \ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow n \leq 50 - \frac{\ln 9 + 50 \ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow n \leq 16,45. \end{aligned}$$

Conclusion : il faut que $n < 17$.

Interprétation : Si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17) la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande ; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.

EXERCICE 4**8 points****Commun à tous les candidats**

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
Dérivée : $f'_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} > 0$ sur $]0; +\infty[$. Les fonctions f_n sont donc croissantes de $-\infty$ à $+\infty$.
- b. La fonction f_n est continue comme somme de fonctions continues et croissante de $-\infty$ à $+\infty$: il existe donc un réel unique $\alpha_n \in]0; +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
Comme $f_n(1) = \frac{1}{n} - 1 < 0$ et $f_n(e) = 1 - \frac{1}{n} > 0$, on en déduit que $1 < \alpha_n < e$.
2. a. L'équation est de la forme : $y = ax + 1$; en utilisant le fait qu'elle contient le point B_n , on obtient $0 = an + 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{n}$. On a donc
 $M(x; y) \in \Delta_n \Leftrightarrow y = -\frac{1}{n}x + 1$
- b. $\Delta_1 \quad y = -x + 1$; $\Delta_2 \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$; $\Delta_3 \quad y = -\frac{1}{3}x + 1$
- c. Le point commun à Γ et Δ_n a ses coordonnées qui vérifient
 $\ln x = -\frac{1}{n}x + 1 \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{n}x - 1 = 0 \Leftrightarrow f_n(x) = 0$ qui a pour solution unique α_n sur $]0; +\infty[$.
- d. α_1 est la solution de $\ln x + x - 1 = 0$ qui a pour solution évidente $\alpha_1 = 1$ (suggéré aussi par le croquis).
Toujours d'après le croquis la suite (α_n) semble croissante.
3. a. On sait que $\ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$.
- b. $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = 1 - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \frac{\alpha_n}{n+1} - \frac{\alpha_n}{n} = \frac{n - \alpha_n}{n(n+1)} \alpha_n = -\frac{\alpha_n}{n(n+1)} < 0$.
- c. Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$. Conclusion comme les fonctions f_n sont croissantes et comme $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, il en résulte que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, ce qui signifie que la suite (α_n) est croissante
- d. La suite (α_n) est croissante et majorée par e : elle est donc convergente vers un réel $\ell \leq e$.
Par continuité, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, donc $\ln \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \ell = 1 \Leftrightarrow \ell = e$.
4. a. On a $\mathcal{A}(\mathcal{D}_n) = \int_{\alpha_n}^e \ln x \, dx$.
En intégrant par parties, on trouve qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.
 $\mathcal{A}(\mathcal{D}_n) = [x \ln x - x]_{\alpha_n}^e = e - e - \alpha_n \ln \alpha_n + \alpha_n = \alpha_n (1 - \ln \alpha_n) = \alpha_n \left(1 - 1 + \frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{\alpha_n^2}{n}$.
- b.



D'après le dessin l'intégrale est comprise entre l'aire du rectangle hachuré de gauche à droite et l'aire du rectangle hachuré de droite à gauche : d'où l'encadrement :

$$\ln \alpha_n (e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq 1 \times (e - \alpha_n)$$

- c. L'encadrement précédent permet (en multipliant par n et en divisant par $\ln \alpha_n$, pour $n \neq 1$) d'obtenir les deux inégalités :

$n(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n}$ et $\alpha_n^2 \leq n(e - \alpha_n)$. On obtient donc l'encadrement final :

$$\alpha_n^2 \leq n(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n}$$

- d. Par passage à la limite on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e - \alpha_n) = e^2$.

On peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e \left(1 - \frac{e}{n}\right)$.

La suite (α_n) converge donc comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire lentement.