∽ Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord mai 2007 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Le plan (P) a une pour équation cartésienne : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Les coordonnées de H vérifient cette équation donc H appartient à (P) et A n'appartient pas à (P).

Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n}(2\ ;\ 1\ ;\ -3)$. H est le projeté orthogonal de A sur (P) si, et seulement si, $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

On a : $\overrightarrow{AH}(-1\ ;\ -9\ ;\ -6)$. Il est clair que les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. H n'est pas le projeté orthogonal de A sur (P) : la proposition 1 est **fausse**.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.

Cette équation s'écrit : $y' = -2y + 2$ qui d'après le cours, a pour solutions : $u(x) = k\text{e}^{-2x} + 1$, $k \in \mathbb{R}$.

La condition $u(0) = 0$ donne $k + 1 = 0$ donc $k = -1$. Par conséquent : $u(x) = -\text{e}^{-2x} + 1 = 1 - \text{e}^{-2x}$.

Alors : $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \text{e}^{-\ln 2} = 1 - \text{e}^{\ln \frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc la proposition 2 est **vraie**.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Effectuons une démonstration par récurrence.

Soit P_n la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 7$ »

- *Initialisation* : $u_0 = 2$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 7$. P_0 est vraie.
- *Hérédité* : soit un naturel $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie pour un.

  Alors : $0 \leqslant u_n \leqslant 7$. En multipliant par 7, on obtient : $0 \leqslant 7u_n \leqslant 49$. Comme la fonction racine carré est croissante sur son ensemble de définition, on en déduit : $0 \leqslant \sqrt{7u_n} \leqslant \sqrt{49} = 7$; donc la proposition est vraie au rang $n + 1$.

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n il l'est aussi au rang $n + 1$: on a donc démontré par récurrence que la proposition est vraie pour tout n, donc la proposition 3 est **vraie**.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

1. a. r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Une écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est $z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\theta}(z - \omega)$ donc une écriture de r est : $\boxed{z' = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} z}$.

b. B a pour affixe $z_B = \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et C est l'image de B par r. On en déduit : $z_C = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} \times \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$. $\boxed{z_C = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}}$.

c. $\boxed{z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}}$ et $\boxed{z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}}$.

d. voir figure à la fin

2. a. D est le barycentre des points A, B et C affecté des coefficients 2 , -1 et 2.

Par conséquent : $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = (2 - 1 + 2)\overrightarrow{OD}$ qui se traduit par l'égalité sur les affixes :

$2z_A - z_B + 2z_C = 3z_D$ d'où $z_D = \dfrac{1}{2}(2z_A - z_B + 2z_C) = \dfrac{1}{3}\left(2\text{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i} + \sqrt{3} - \text{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$.

$\boxed{z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}}$.

b. $|z_A| = |\text{i}| = 1$; $|z_B| = \left|\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}\right| = 1$ car, pour tout x, $|\text{e}^{\text{i}x}| = 1$.

De même, $|z_C| = \left|\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 1$; $z_D = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $|z_D| = 1$.

$\boxed{\text{Les quatre points A, B, C et D sont sur le cercle centre O et de rayon 1}}$.

3. a. h est l'homothétie de centre A et de rapport 2. Une écriture complexe de h est : $z' - z_A = 2(z - z_A)$ donc $z' - \text{i} - 2(z - \text{i})$ soit : $\boxed{z' = 2z - \text{i}}$.

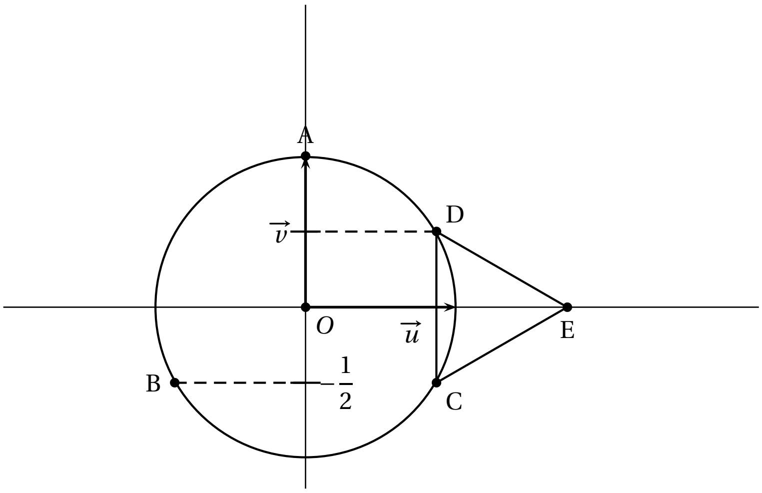
b. E est l'image de D par h. On a : $z_E = 2z_D - \mathrm{i} = \sqrt{3} + \mathrm{i} - \mathrm{i} = \sqrt{3}$. $\boxed{z_E = \sqrt{3}}$.

4. a. $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. $\boxed{\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

b. On en déduit : $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right| = \dfrac{CD}{CE} = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc $CD = CE$.

$\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CE}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ à $2k\pi$ près.

CDE est isocèle et l'angle au sommet vaut $\dfrac{\pi}{3}$: **c'est un triangle équilatéral**.



EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

1. f est la transformation dont une écriture complexe est : $z' = (2 - 2\mathrm{i})z + 1$. Cette écriture est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = 2 - 2\mathrm{i}$ et $\beta = 1$ donc $\boxed{f \text{ est une similitude directe}}$.

Elle a pour point fixe Ω d'affixe ω avec $\omega = \dfrac{\beta}{1 - \alpha} = \dfrac{1}{1 - (2 - 2\mathrm{i})} = \dfrac{1}{-1 + 2\mathrm{i}} = \dfrac{-1 - 2\mathrm{i}}{5} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

Le rapport de cette similitude est $|\alpha| = |2 - 2\mathrm{i}| = |2(1 - \mathrm{i})| = 2|1 - \mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$.

$\alpha = 2 - 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Un argument de α est $-\dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{f \text{ est la similitude directe de point fixe } \Omega\left(-\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}\right), \text{ de rapport } 2\sqrt{2} \text{ et d'angle } -\dfrac{\pi}{4}}$.

2. a. Soit B' l'image de B par f : $z_{B'} = (2 - 2\mathrm{i})z_B + 1 = (2 - 2\mathrm{i})(-4 + 2\mathrm{i}) + 1 = -3 + 12\mathrm{i}$. $z_{B'} = -3 + 12\mathrm{i}$.

b. $\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{-3 + 12\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i}}{3 + 5\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i}} = \dfrac{-4 + 8\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \dfrac{-4(1 - 2\mathrm{i})}{\mathrm{i}(1 - 2\mathrm{i})} = \dfrac{-4}{\mathrm{i}} = 4\mathrm{i}$.

On en déduit que $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB'}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(4\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, **les droites (CB') et (CA) sont orthogonales**.

3. Soit M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$. $M' = \mathrm{f}(M)$ a pour affixe z' avec $z' = (2 - 2\mathrm{i})z + 1 =$
$(2 - 2\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) + 1 = 2x + 2y + 1 + \mathrm{i}(2z - 2x)$.

$\overrightarrow{CM'}$ a pour affixe $z' - z_C = 2x + 2y + (2x - 2y - 4)\mathrm{i}$.

$\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{CA}} = a - c = 2 + \mathrm{i}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont respectivement $(2x + 2y\ ;\ 2y - 2x - 4)$ et $(2\ ;\ 1)$.

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si et seulement si $2(2x + 2y) + 2y - 2x - 4 = 0$ soit $\boxed{x + 3y = 2}$ après simplifications.

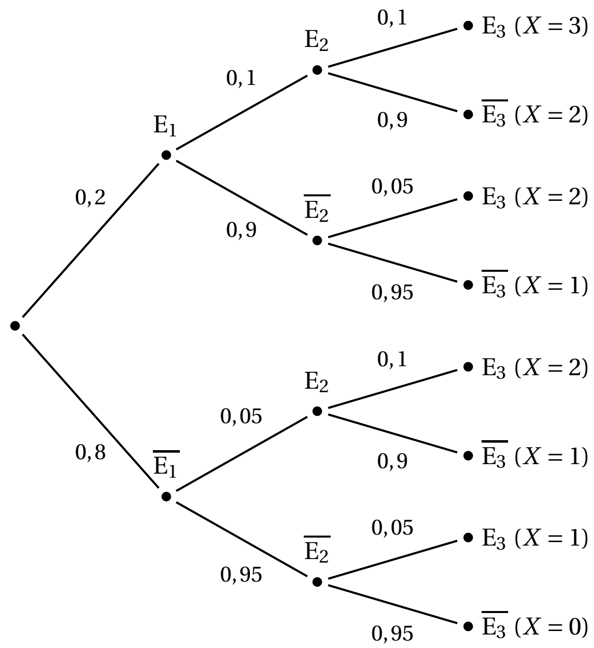
4. Soit l'équation (E) ; $x+3y=2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. $-4+3\times 2=-4+6=2$ donc $(-4\ ;\ 2)$ est solution de (E).

b. (E) s'écrit alors : $x+3y=-4+3\times 2$, c'est-à-dire $x+4=3(2-y)$.
3 divise $3(2-y)$ donc 3 divise $x+4$. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+4=3k$.
En remplaçant dans l'équation, on obtient : $3k=3(2-y)$ d'où $2-y=k$ qui donne $y=2-k$.
L'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\mathcal{S}=\{(-4+3k\ ;\ 2-k),\ k\in\mathbb{Z}\}}$

c. On cherche les couples solutions de (E) vérifiant $-5\leqslant x\leqslant 5$ et $-5\leqslant y\leqslant 5$.
$-5\leqslant -4+3k\leqslant 5$ donne $-1\leqslant 3k\leqslant 9$ d'où $-\dfrac{1}{3}\leqslant k\leqslant 3$. Alors $k\in\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.
$-5\leqslant 2-k\leqslant 5$ donne $-7\leqslant -k\leqslant 3$ d'où $-3\leqslant k\leqslant 7$.
Finalement, les valeurs possibles pour k sont 0, 1 , 2 ou 3.
Les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-5; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux sont les points de coordonnées (-4; 2), (-1; 1), (2; 0) et (5; -1).
Remarque : on retrouve le point B qu'on avait trouvé à la question 2) a).

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats



1. Représentons un arbre : (voir ci-dessus)
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

a. X peut prendre les valeurs 0, 1 , 2 ou 3.

b. $(X=2)=(\text{E}_1\cap\text{E}_2\cap\overline{\text{E}_3})\cup(\text{E}_1\cap\overline{\text{E}_2}\cap\text{E}_3)\cup(\overline{\text{E}_1}\cap\text{E}_2\cap\text{E}_3)$.
C'est une réunion d'évènements incompatibles, donc :
$p(X=2)=p(\text{E}_1\cap\text{E}_2\cap\overline{\text{E}_3})+p(\text{E}_1\cap\overline{\text{E}_2}\cap\text{E}_3)+p(\overline{\text{E}_1}\cap\text{E}_2\cap\text{E}_3)=(0,2\times 0,1\times 0,9)+(0,2\times 0,9\times 0,05)+(0,8\times 0,05\times 0,1)=0,031$.
$p(X=2)=\boxed{0,031}$.
De même : $p(X=3)=p(\text{E}_1\cap\text{E}_2\cap\text{E}_3)=0,2\times 0,1\times 0,1=\boxed{0,002}$.

c. $p(X=0)=p(\overline{\text{E}_1}\cap\overline{\text{E}_2}\cap\overline{\text{E}_3})=0,8\times 0,95\times 0,95=\boxed{0,722}$.
$p(X=1)-1-[p(X=0)+p(X=2)+p(X=3)]=1-(0,722+0,031+0,002)=\boxed{0,245}$.
On en déduit la loi de probabilité de X, résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

d. L'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i p(X = x_i) = (0\times0,722)+(1\times0,245)+(2\times0,031)+(3\times0,002) = 0,313$.

$\boxed{E(X) = 0,313}$.

2. **a.** Pour tout n non nul, $p(E_n \cap E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) = 0,1 \times p(E_n) = \boxed{0,1p_n}$.

De même : $p\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right) = p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p\left(\overline{E_n}\right) = 0,05 \times \left(1 - p(E_n)\right) = \boxed{0,05(1-p_n)}$.

b. On a : $E_{n+1} = (E_n \cap E_{n+1}) \cup \left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right)$ (réunion d'évènements incompatibles). Par conséquent :

$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p\left(\overline{E_n} \cap E_{n+1}\right) = 0,1p_n + 0,05\left(1 - p_n\right) = \boxed{0,05p_n + 0,05}$

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a. Pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{20}p_n + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{20}p_n - \dfrac{1}{380} = \dfrac{1}{20}\left[p_n - \dfrac{1}{19}\right] =$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{20}u_n$.

Pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{20}u_n$ donc (u_n) est une suite **géométrique**, de raison $q = \dfrac{1}{20}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{19} = 0,2 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{19} = \dfrac{14}{95}$.

b. On en déduit : $u_n = u_1 q^{n-1}$ donc $u_n = \dfrac{14}{95}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = u_n + \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{19} + \dfrac{14}{95}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < \dfrac{1}{20} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1} = 0$ et par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \boxed{\dfrac{1}{19}}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances.

a. Soit la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

g est dérivable comme différence de fonctions dérivables ; pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - x > 0$ puisque $\mathrm{e}^x > x$ pour tout x.

$g'(x)$ est donc positif et g est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$; g(0) = 1 donc, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant g(0) = 1$ donc $\boxed{g(x) > 0}$.

b. On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$. Pour $x > 0$, en divisant par x, on obtient : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, d'après le pré-requis, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \boxed{+\infty}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a. La fonction exponentielle est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\boxed{f(x) \geqslant 0}$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. On pose $X = \dfrac{x}{2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$.

Par conséquent, d'après le théorème sur la composition des limites, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}$.

On a vu dans la question 1. que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe C admet donc une **asymptote** d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

c. f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$f = \dfrac{1}{4}u\mathrm{e}^v$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = -\dfrac{x}{2}$. Alors $f' = \dfrac{1}{4}\left(u\mathrm{e}^v\right)' = \dfrac{1}{4}\left(u' \times \mathrm{e}^v + u \times v'\mathrm{e}^v\right)$.

Pour tout x, on en déduit : $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2}x \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) = \boxed{\dfrac{1}{8}(2-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

$\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$ donc positif pour $x \leqslant 2$, nul en 2 et négatif pour $x \geqslant 2$.

f est croissante sur $[0\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2\text{e}}$	$\searrow$	0

3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par ; $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.

a. F est la primitive de f qui s'annule en 0 donc $F' = f$. Comme on a montré que f était positive, F est positive et F est croissante.

b. Pour tout x, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{4}t\text{e}^{-\frac{t}{2}}$.

Posons $\alpha(t) = t$ d'où $\alpha'(t) = 1$

$\beta'(t) = \dfrac{1}{4}\text{e}^{-\frac{t}{2}}$ d'où $\beta(t) = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{-\frac{t}{2}}$.

α et β sont continues donc on peut effectuer une intégration par parties.

Alors : $F(x) = \left[-\dfrac{1}{2}t\text{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \text{e}^{-\frac{t}{2}}\,\text{d}t = -\dfrac{1}{2}x\text{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}\left[-2\text{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x = \boxed{1 - \text{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\text{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\infty$ donc par composition avec la fonction exponentielle, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$.

On a vu précédemment que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\text{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

On en déduit le tableau de variations de F :

x	0		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	1

d. F est continue puisque dérivable ; F est strictement croissante ; $F(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.

À la calculatrice, on trouve : $\boxed{\alpha \approx 3.36}$ à 0,01 près par excès.

4. $A_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\text{d}t = F(n) - F(0) = F(n)$ car $F(0) = 0$. D'après la question précédente, le plus petit entier n pour lequel $A_n \geqslant 0,5$ est $\boxed{n = 4}$.